

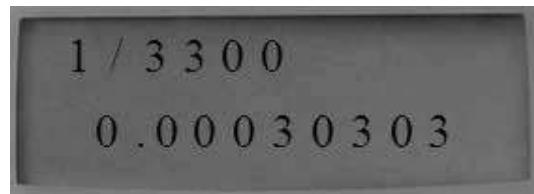
# Chapitre 1 - Les outils

## I. Outils mathématiques

### 1. Présentation des résultats numériques

#### a. Les chiffres significatifs

Pour expliquer ce que sont les chiffres significatifs, prenons l'exemple simple de la division de 1 par 3300. Lorsque la calculatrice est en mode « normal », abréviation « NORM » dans le menu (et nous invitons le lecteur à lire, si ce n'est déjà fait, la notice de sa calculatrice certainement neuve), elle affiche :



1 / 3300  
0.00030303

- Les zéros à gauche du premier chiffre non nul ne sont pas des chiffres significatifs ;
- Le premier chiffre non nul et tous les chiffres à sa droite, même les zéros, sont significatifs ;
- Présenter un résultat avec trois chiffres significatifs, c'est donner les trois premiers chiffres significatifs en arrondissant le troisième au plus proche.

Par exemple ici :  $1/3300 = 3,03 \cdot 10^{-4}$

ou  $1/3300 = 30,3 \cdot 10^{-5}$

ou encore  $1/3300 = 303 \cdot 10^{-6}$

#### b. Le mode « SCI » de la calculatrice

En mode « scientifique » (SCI) le premier chiffre présenté est le premier chiffre significatif.



1 / 3300  
3.03030303  $\cdot 10^{-4}$

Pour présenter le résultat, il n'y a donc plus qu'à arrondir au plus proche le dernier chiffre significatif demandé, sans oublier l'exposant.

Par exemple à trois chiffres significatifs :  $1/3300 = 3,03 \cdot 10^{-4}$

Ou à quatre chiffres significatifs :  $1/3300 = 3,030 \cdot 10^{-4}$

### c. Le mode « ENG » de la calculatrice

En mode « engineer » (ENG) le premier chiffre présenté est le premier chiffre significatif.



La virgule est placée de sorte à ce que l'exposant corresponde à un préfixe du système international d'unités (SI) (voir ci-dessous).

### d. Utilisation des préfixes SI

Pour donner un résultat on préférera encore utiliser un préfixe SI (tableau 1) plutôt qu'une puissance de dix.

Facteur	Préfixe	Symbol	Facteur	Préfixe	Symbol
$10^{24}$	yotta	Y	$10^{-1}$	déci	d
$10^{21}$	zetta	Z	$10^{-2}$	centi	c
$10^{18}$	exa	E	$10^{-3}$	milli	m
$10^{15}$	peta	P	$10^{-6}$	micro	$\mu$
$10^{12}$	téra	T	$10^{-9}$	nano	n
$10^9$	giga	G	$10^{-12}$	pico	p
$10^6$	méga	M	$10^{-15}$	femto	f
$10^3$	kilo	k	$10^{-18}$	atto	a
$10^2$	hecto	h	$10^{-21}$	zepto	z
$10^1$	déca	da	$10^{-24}$	yocto	y

Tableau 1 : préfixes du système international d'unités.

Par exemple, si le calcul d'une longueur  $\ell$  donne  $303,030303 \cdot 10^{-6}$  mètres, on notera, avec trois chiffres significatifs, le résultat  $\ell = 303 \mu\text{m}$  qui se lit « 303 micromètres ». On comprend ici l'avantage du mode « ENG » de la calculatrice.

## 2. La dérivée

### a. Coefficient directeur d'une droite

Soit un plan pourvu d'un repère constitué des axes (Ox) et (Oy). Soit une droite de ce plan définie par deux points A et B, de coordonnées respectives  $(x_A ; y_A)$  et  $(x_B ; y_B)$  (voir figure 1). Le coefficient directeur de cette droite est alors défini comme un scalaire, que nous allons noter «  $a$  », et tel que :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Sous la forme  $y_B - y_A = a(x_B - x_A)$  on remarque facilement que si  $x_B - x_A = 1$  alors  $y_B - y_A = a$ .

Le coefficient directeur correspond à la valeur dont varie  $y$  lorsque  $x$  augmente d'une unité.

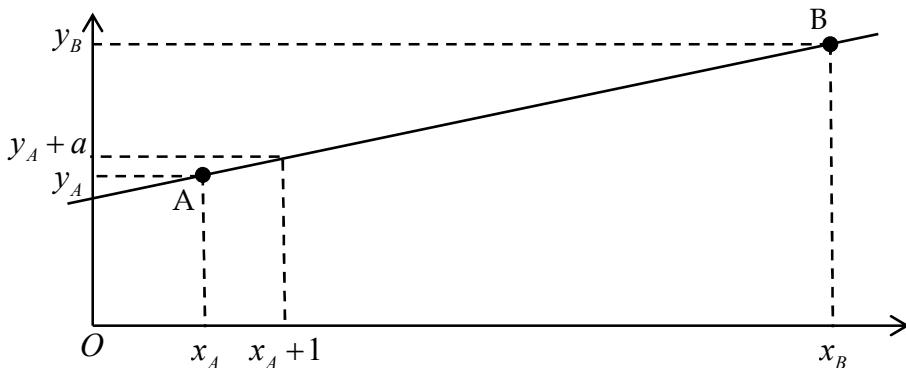


Figure 1 : le coefficient directeur d'une droite est la valeur «  $a$  » qui correspond à la variation de  $y$  lorsque  $x$  augmente d'une unité. «  $a$  » est négatif si la droite est décroissante.

### b. La fonction dérivée d'une fonction $f(x)$

Soient A et B deux points de la représentation graphique d'une fonction  $f(x)$  représentée en gris sur la figure 2. Les abscisses de ces deux points sont alors respectivement  $f(x_A)$  et  $f(x_B)$ . En déplaçant le point B le long de la représentation graphique dans la direction de A jusqu'au point B' (figure 2), on visualise que si B se rapproche infiniment près de A, la droite (AB) sera confondue avec la tangente à la représentation graphique au point A (figure 3).

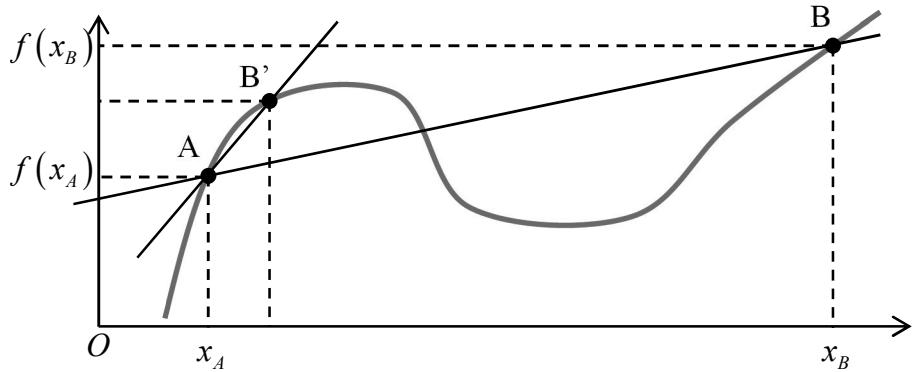


Figure 2 : sur ce schéma sont représentées les droites passant par A et par des points plus ou moins proches de A.

Le coefficient directeur de la tangente en A à la représentation graphique de la fonction  $f(x)$ , que nous continuons pour l'instant de noter « a », est alors défini par la limite, lorsque B tend vers A, du rapport de la différence des abscisses par la différence des ordonnées :

$$a = \lim_{B \rightarrow A} \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A}$$

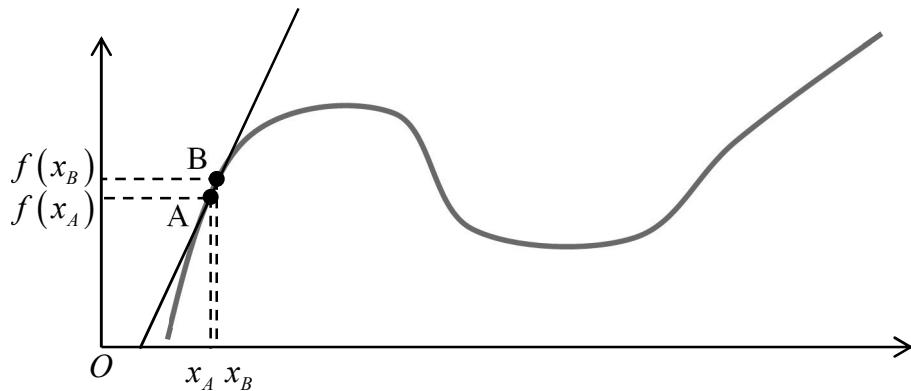


Figure 3 : lorsque le point B est infiniment proche du point A, la droite passant par les deux points est la tangente à la courbe.

Comme B tend vers A, la différence  $(x_B - x_A)$  devient une valeur infinitésimale (aussi proche de zéro que nous pouvons l'imaginer... sans jamais être nul) notée  $dx$ . Nous pouvons écrire :

$$a = \frac{f(x_A + dx) - f(x_A)}{(x_A + dx) - x_A}$$

Comme  $dx$  est infinitésimal  $f(x_A + dx)$  ne peut être différent de  $f(x_A)$  que d'une valeur infinitésimale que nous notons  $df(x_A)$ .

Nous obtenons :

$$a = \frac{(f(x_A) + df(x_A)) - f(x_A)}{dx} = \frac{df(x_A)}{dx}$$

Nous insistons auprès du lecteur sur le fait que la notation  $\frac{df(x_A)}{dx}$  est donc la division de la valeur numérique  $df(x_A)$  par la valeur numérique  $dx$ . Trop d'étudiants voient cette notation comme un symbole mathématique abstrait voulant juste dire « dérivée de la fonction » en oubliant qu'il s'agit d'une division.

Il n'y aura donc rien d'étonnant à écrire :

$$a = \frac{df(x_A)}{dx} \Leftrightarrow df(x_A) = a \cdot dx$$

S'il est possible de calculer pour chaque valeur de  $x$  la valeur de «  $a$  », il est alors possible de définir la fonction  $f'(x)$  appelée « dérivée de la fonction  $f(x)$  », telle que pour toutes valeurs de  $x$ ,  $f'(x)$  soit la valeur du coefficient directeur de la tangente à la représentation graphique de la fonction  $f(x)$  au point d'abscisse  $x$ .

Nous avons alors au point d'abscisse  $x_A$  :

$$f'(x_A) = \frac{df(x_A)}{dx} = a$$

Et nous pouvons écrire pour toutes valeurs de  $x$  :

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \Leftrightarrow df(x) = f'(x) \cdot dx$$

Rappelons sans démonstration quelques fonctions dérivées usuelles (tableau 2) :

fonctions	fonctions dérivées
$a$	0
$ax + b$	$a$
$ax^n + b$	$a.n.x^{n-1}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$e^x$	$e^x$
$a.f(x)$	$a.f'(x)$
$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$
$f(x).g(x)$	$f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)}$
$a.f^n(x) + b$	$a.n.f^{n-1}(x).f'(x)$
$f(g(x))$	$f'(g(x)).g'(x)$

Tableau 2 : quelques fonctions et leurs dérivées.

### 3. Le développement limité d'ordre 1

Le développement limité d'ordre 1 permet de donner une expression approchée d'une fonction, le but étant généralement d'obtenir une expression plus simple.

Appuyons-nous sur la représentation graphique d'une fonction pour imager la méthode (figure 4).

Soit des points A et B de la représentation graphique d'une fonction  $f(x)$  de coordonnées respectives  $(x_A; f(x_A))$  et  $(x_B; f(x_B))$ . Soit la tangente à la courbe au point A et le point C sur cette tangente ayant la même abscisse que le point B (voir figure 4).  $f'(x_A)$  étant le coefficient directeur de la tangente, nous obtenons comme ordonnée du point C la valeur  $f(x_A) + f'(x_A) \times (x_B - x_A)$ .

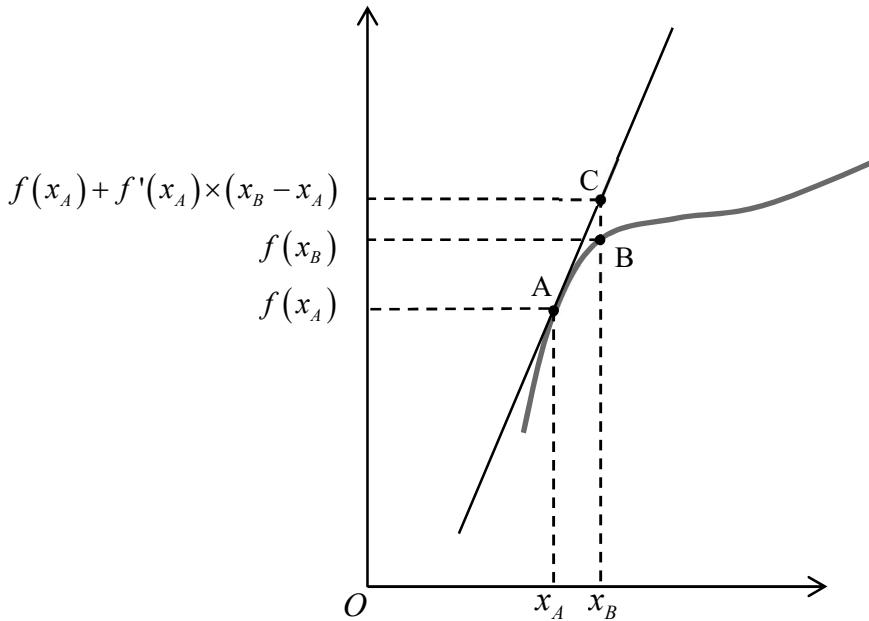


Figure 4 : représentation graphique de la fonction  $f(x)$  sur laquelle on peut voir que si la valeur  $(x_B - x_A)$  est très petite on pourra confondre les ordonnées des points B et C et écrire  $f(x_B) \sim f(x_C)$ .

Si maintenant la différence  $(x_B - x_A)$  tend vers une valeur très petite, les points B et C s'approchent l'un de l'autre (en s'approchant du point A) et leurs ordonnées tendent également l'une vers l'autre jusqu'à être quasi égales. Nous pouvons alors écrire  $f(x_B) \approx f(x_A) + f'(x_A) \times (x_B - x_A)$ .

En notant  $\varepsilon$  la très petite valeur  $(x_B - x_A)$  et en faisant cette démarche quelle que soit l'abscisse  $x$  d'un point de la courbe nous obtenons l'expression plus générale :

$$f(x + \varepsilon) \approx f(x) + f'(x) \times \varepsilon$$

Expression du développement limité d'ordre 1 de la fonction  $f(x)$  lorsque  $\varepsilon \ll 1$

## 4. L'intégrale

### a. Aire sous une courbe

Considérons la représentation graphique d'une fonction  $f(x)$  sur la figure 5. Pour calculer l'aire sous la courbe comprise entre les points A et B, nous allons approximer cette aire à la somme des aires des rectangles représentés remplis de motifs.

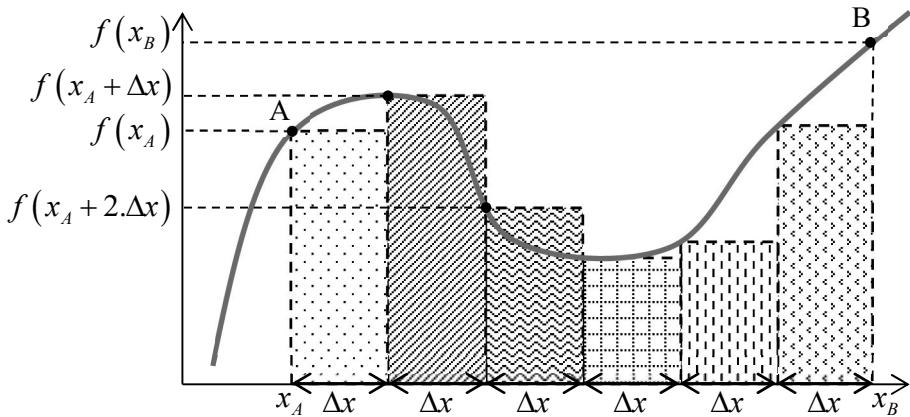


Figure 5 : approximation de l'aire sous la courbe entre les points A et B à la somme des aires de six rectangles.

Le premier rectangle, celui le plus à gauche sur la figure 5 et rempli par le motif , à une hauteur égale à  $f(x_A)$  et une largeur égale à  $\Delta x = \frac{x_B - x_A}{n}$  avec ici la représentation particulière de  $n = 6$ . L'aire de ce premier rectangle est donc égale au produit de la hauteur par la largeur :  $f(x_A) \times \Delta x$ .

Le deuxième rectangle, dont le motif est , a une hauteur égale à  $f(x_A + \Delta x)$  et une largeur égale à  $\Delta x = \frac{x_B - x_A}{k}$ . Cela donne une aire dont l'expression est :  $f(x_A + \Delta x) \times \Delta x$ .

De proche en proche nous obtenons l'expression de l'aire du  $k^{\text{ième}}$  rectangle :  $f(x_A + (k-1)\Delta x) \times \Delta x$ .

Si nous approximons l'aire sous la courbe, notée A, à la somme des aires des rectangles, alors :

$$\begin{aligned}
 A &\approx \underbrace{f(x_A) \cdot \Delta x}_{\substack{\text{surface du premier} \\ \text{rectangle, de hauteur} \\ f(x_A) \text{ et de largeur } \Delta x}} + \underbrace{f(x_A + \Delta x) \cdot \Delta x}_{\substack{\text{surface du deuxième} \\ \text{rectangle, de hauteur} \\ f(x_A + \Delta x) \text{ et de largeur } \Delta x}} + \dots \\
 &\approx \sum_{k=0}^{n-1} f(x_A + k\Delta x) \cdot \Delta x
 \end{aligned}$$

Nous remarquons que par rapport à l'aire sous la courbe nous comptons parfois trop de surface (c'est le cas pour les 2<sup>ème</sup> et 3<sup>ème</sup> rectangles), et parfois pas assez (1<sup>er</sup>, 4<sup>ème</sup>, 5<sup>ème</sup> et 6<sup>ème</sup> rectangles). Par contre, ce que nous comptons en plus n'est pas égal à ce que nous obtenons en moins !