Chapitre 1
La division euclidienne

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des *nombres entiers naturels*. Ces nombres sont les nombres 0, 1, 2, 3, 4, 5, etc.
On peut donc écrire : $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$
Dans ce chapitre, on ne considèrera que des (nombres) entiers naturels.

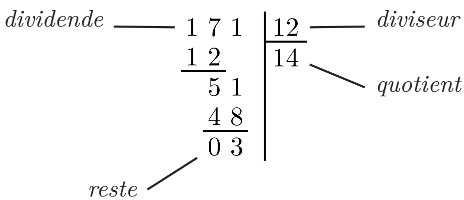
1.1 Définition

La « division euclidienne [*] » n'est autre que la division d'un nombre entier naturel par un autre nombre entier naturel non nul. [†]

Prenons un exemple simple :

Exemple : Soit à répartir 171 œufs dans des barquettes de 12 œufs.

Comme on le sait, on effectue une division que l'on appelle une « division euclidienne » :



171 est le *dividende*
12 est le *diviseur*
3 est le *reste*
14 est le *quotient*

14 barquettes sont remplies, et il reste à part 3 œufs. On dit que 14 est le quotient (entier) de 171 par 12, et que 3 est le reste de cette division.

[*]. La division euclidienne doit son nom au mathématicien grec Euclide, qui vivait au IVᵉ s. av. J.-C.

[†]. La précision « non nul » est nécessaire : il n'est en effet pas possible de diviser par 0

Remarque : Si le reste avait été nul, on aurait dit que la division « tombe juste ». Néanmoins, le plus souvent, il n'y a pas de raison pour qu'une telle division tombe juste.

Plus généralement, faire la division euclidienne d'un nombre entier a par un nombre entier b non nul aboutit à la détermination d'un quotient q et d'un reste r tels que l'on ait la relation suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} \text{dividende} & = & \text{diviseur} & \times & \text{quotient} & + & \text{reste} \\ a & = & b & \times & q & + & r \end{array}$$

De plus, **le reste r de la division est toujours strictement plus petit que le diviseur b**.

Plus formellement, on donne la définition suivante :

> **Définition**
> On appelle *quotient entier* de deux entiers a et b le plus grand entier q dont le produit par b puisse se retrancher du nombre a. On appelle alors *reste* l'entier $r = a - b \times q$. Le reste r est strictement inférieur au diviseur b.

Remarque : À noter les cas particuliers suivants :
- ⋆ Si $a < b$, alors le quotient est nul et le reste a.
- ⋆ Si $a = b$, alors le quotient est 1 et le reste est nul.

1.2 Exercices

Exercice 1. On veut ranger 64 œufs dans des boîtes de 6. Combien de boîtes remplit-on ? Combien d'œufs reste-t-il ?

Exercice 2. Effectuer la division euclidienne de a par b dans les cas suivants, puis écrire l'opération en ligne sous la forme : $a = b \times q + r$.

a) $a = 1789$ et $b = 9$;
b) $a = 9876$ et $b = 15$;
c) $a = 509$ et $b = 8$;
d) $a = 1024$ et $b = 64$;
e) $a = 4523$ et $b = 25$;
f) $a = 3007$ et $b = 13$.

Exercice 3. Dans une division, le reste est égal à 1, le quotient est 187 et le diviseur est 32. Quel est le dividende ?

Exercice 4. Citer tous les nombres dont le quotient dans la division euclidienne par 7 est égal à 4.

Exercice 5. Citer quelques nombres dont le reste dans la division euclidienne par 7 est égal à 5.

Exercice 6. Citer un nombre dont le quotient dans la division euclidienne par 7 est égal à 0. Quel est alors le reste ?

Exercice 7. Citer un nombre dont le quotient dans la division euclidienne par 7 est égal à 1. Quel est alors le reste ?

Exercice 8. Quels sont les dividendes possibles de la division euclidienne par 7 dont le quotient est 29 ?

Exercice 9. Sachant que dans la division euclidienne de 1075 par 39, le quotient est 27 et le reste 22, trouver, sans poser l'opération, le reste et le quotient dans la division euclidienne de 1075 par 27.

Exercice 10. Sachant que dans la division euclidienne de 100 par 31, le quotient est 3 et le reste 7, compléter le tableau suivant sans poser aucune division :

La division euclidienne ...	donne pour quotient	et pour reste
de 200 par 62	...	...
de 300 par 93	...	...
de ... par 279	3	63
de 1200 par ...	3	84

Exercice 11. Le 1er janvier 2010 est tombé un vendredi. Combien y a-t-il eu de semaines entières en 2010 ? Combien de jours reste-t-il pour terminer l'année ? En déduire le jour de la semaine du 1er janvier 2011.

Chapitre 2
Divisibilité

Dans ce chapitre, on ne considère que des *nombres entiers naturels*.

2.1 Diviseur, multiple

Définition
On dit qu'un entier n est *divisible* par un entier d lorsqu'il existe un entier k tel que $n = k \times d$.
Autrement dit, un entier n est divisible par un entier d lorsque le reste de la division euclidienne de n par d est nul.
On dit aussi que n est *multiple* de d, ou que d est un *diviseur* de n.

Exemple : 105 est un multiple de 21 (car $105 = 21 \times 5$) ;
on peut aussi dire que 21 est un diviseur de 105.

Exemple : 174 est-il divisible par 58 ?
On effectue la division euclidienne de 174 par 58. On trouve comme quotient 3 et comme reste 0 :

$$174 \div 58 = 3 \quad \text{donc} \quad 174 = 3 \times 58 = 58 \times 3$$

Donc 174 est multiple de 3 et de 58.
Remarquons que 1, 3, 58, 174 sont des diviseurs de 174.

Remarque :

- Le nombre 1 divise tout entier naturel.
- Tout entier naturel est diviseur de lui-même.
- Le nombre 0 ne divise aucun entier naturel différent de 0.
- Le nombre 0 est multiple de tous les entiers naturels.

Remarques :
- Les diviseurs d'un nombre sont encadrés par 1 et le nombre lui-même.
- La suite des multiples d'un nombre entier non nul commence à 0 et n'a pas de fin.

Par exemple,
- Les diviseurs de 15 sont : 1, 3, 5, 15. Ils sont compris entre 1 et 15.
- Les premiers multiples de 15 sont : 0, 15, 30, 45, 60, 75, ...

Définition
- On dit qu'un entier est *pair* lorsqu'il est divisible par 2.
- On dit qu'un entier est *impair* lorsqu'il n'est pas pair.
- Connaître la *parité* d'un nombre, c'est, par définition, savoir si il est pair ou impair.

On admet les propriétés suivantes :

Propriété
- *Si un entier naturel en divise un autre, alors il divise aussi tous les multiples de celui-ci.*
- *Si un entier naturel en divise deux autres, alors il divise aussi la somme et la différence de ces deux nombres.*

Exemples :
- 5 divise 15. Donc 5 divise $15 \times 7 = 105$.
- 7 divise 91 et 119. Donc 7 divise leur somme, à savoir 210, et leur différence, à savoir 28.

2.2 Règles de divisibilité

On rappelle les critères de divisibilité suivants :

d	Un entier naturel est divisible par d si...
2	Le chiffre des unités est soit 0, soit pair (2, 4, 6 ou 8).
3	La somme de ses chiffres est divisible par 3.
4	Les deux derniers chiffres forment un multiple de 4.

d	Un entier naturel est divisible par d si…
5	Le chiffre des unités est soit 0, soit 5.
8	Les trois derniers chiffres forment un multiple de 8.
9	La somme de ses chiffres est divisible par 9.
10	Le dernier chiffre est 0.

Par exemple, 2 457 est divisible par 9 (et donc aussi par 3).

2.3 Détermination de l'ensemble des diviseurs d'un entier naturel

Exemple : On souhaite déterminer l'ensemble des diviseurs de 312.

$$
\begin{array}{lcll}
1 & \times & 312 & = 312 \\
2 & \times & 156 & = 312 \\
3 & \times & 104 & = 312 \\
4 & \times & 78 & = 312 \\
\cancel{5} & & & \\
6 & \times & 52 & = 312 \\
\cancel{7} & & & \\
8 & \times & 39 & = 312 \\
\cancel{9} & & & \\
\cancel{10} & & & \\
\cancel{11} & & & \\
12 & \times & 26 & = 312 \\
13 & \times & 24 & = 312 \\
\cancel{14} & & & \\
\cancel{15} & & & \\
\cancel{16} & & & \\
\cancel{17} & & & \\
\cancel{18} & \times & \cancel{18} & > 312
\end{array}
$$

On dispose les premiers entiers naturels en colonne.

- On parcourt la première colonne en commençant par 1 (qui divise tout entier naturel).
- Si un entier n divise 312, alors on place dans une deuxième colonne le quotient de 312 par n.
- Si un entier n ne divise pas 312, alors on le barre, ainsi que ses multiples (qui ne seront pas diviseurs de 312, eux non plus).
- On arrête de tester la divisibilité de 312 par n dès que $n \times n$ dépasse 312.

En conclusion, l'ensemble des diviseurs de 312 est exactement :
$\{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,6\,;\,8\,;\,12\,;\,13\,;\,24\,;\,26\,;\,39\,;\,52\,;\,78\,;\,104\,;\,156\,;\,312\,\}$

2.4 Nombres premiers

Définition
On dit qu'un entier naturel est un *nombre premier* lorsqu'il est différent de 1, et qu'il n'est divisible que par lui-même et par l'unité.
Autrement dit, un entier naturel est premier s'il possède exactement deux diviseurs.

Convention
Le nombre 1 n'est pas un nombre premier [*].

Exemples :

- Le nombre 2 est premier : en effet, ses diviseurs sont 1 et 2.
- Le nombre 3 est premier : en effet, ses diviseurs sont 1 et 3.
- Le nombre 13 est premier : ses diviseurs sont 1 et 13.
- Le nombre 25 n'est pas premier : ses diviseurs sont 1, 5 et 25.

Remarque : Le nombre 2 est l'unique nombre premier pair. Autrement dit, tout nombre premier distinct de 2 est impair.

Exemple : Voici la liste des nombres premiers inférieurs à 50 :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

2.5 Décomposition d'un entier en facteurs premiers

Le mathématicien grec Euclide (IV^{e} s. av. J.-C.) a établi les trois théorèmes fondamentaux suivants, que nous admettrons :

Théorème
La suite des nombres premiers est illimitée.

∗. Cette convention se justifie par le souci de garantir l'unicité de la décomposition en facteurs premiers.

Théorème
Tout nombre entier non premier, autre que 1, admet au moins un diviseur premier.

On en déduit la règle :

Règle
Pour reconnaître si un nombre est premier, on le divise par les nombres premiers successifs inférieurs à ce nombre en commençant par les plus petits. Si aucune division ne se fait exactement, le nombre est premier.

Théorème
Tout nombre entier non premier, autre que 1, peut se décomposer en un produit de facteurs premiers.
De plus, la décomposition d'un nombre entier en facteurs premiers est unique (à l'ordre près des facteurs).

Exemple : Décomposer 315 en produit de facteurs premiers.

315 est divisible par 3 :	$315 = 3 \times 105$
105 est à son tour divisible par 3 :	$105 = 3 \times 35$
enfin, 35 s'écrit comme produit de 5 et 7 :	$35 = 5 \times 7$

Finalement, $315 = 3 \times 3 \times 5 \times 7$

On dit que l'*on a décomposé* 315 *en produit de nombres premiers*. On dit aussi parfois que l'on a mis le nombre 315 sous forme *factorisée*.
En pratique, on adopte la disposition ci-contre : ➡

$$\begin{array}{r|l} 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Exemple : Décomposer 360 en (produit de) facteurs premiers.

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$