

Démontrer une implication ou une équivalence



Quand on ne sait pas !

Soit P et Q deux propositions.

- ▶ **(Implication)** On appelle implication de Q par P , et on note $P \implies Q$, la proposition $(\text{NON } P) \text{ OU } Q$.
 $P \implies Q$ se lit « P implique Q » ou encore « si P , alors Q ».
Le symbole \implies ne signifie pas « donc ».

- ▶ **(Équivalence)** On appelle équivalence de P et Q , et on note $P \iff Q$, la proposition $[P \implies Q] \text{ ET } [Q \implies P]$.

- ▶ **(Disjonction)** Toute disjonction peut être reformulée sous la forme d'une implication :

$$[P \text{ OU } Q] = [(\text{NON } P) \implies Q]$$

Que faire !

Par la suite, les ^(*) signifient que les points de suspension sont à compléter en fonction des données de l'énoncé.

- Pour montrer l'implication $P \implies Q$, on effectue un raisonnement direct qu'on rédige comme suit :

Supposons P , c'est-à-dire ... (*). Montrons Q , c'est-à-dire ... (*).

$$\left[\begin{array}{c} \text{Raisonnement qui} \\ \text{aboutit à } Q \end{array} \right]$$

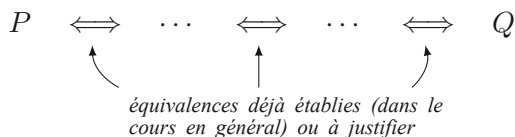
Conclusion : on a bien montré l'implication $P \implies Q$.

- Pour montrer l'équivalence $P \iff Q$, on peut :
 - ▶ ou bien raisonner par double implication, c'est-à-dire montrer successivement les deux implications $P \implies Q$ et $Q \implies P$,

- ▶ ou bien raisonner par équivalences, c'est-à-dire modifier P de proche en proche jusqu'à obtenir Q en préservant les équivalences à chaque étape.

On rédige alors de la manière suivante :

On a les équivalences suivantes :



Conclusion : on a bien montré l'équivalence $P \iff Q$.

- Pour montrer la disjonction P OU Q , il suffit de montrer l'implication $[(\text{NON } P) \implies Q]$. On rédige alors de la manière suivante :

Supposons $\text{NON } P$, c'est-à-dire ... (*). Montrons Q , c'est-à-dire ... (*).

$$\left[\begin{array}{c} \text{Raisonnement qui} \\ \text{aboutit à } Q \end{array} \right]$$

Conclusion : on a bien montré la disjonction P OU Q .

EXEMPLE 1 Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, \max(x^2, (x-2)^2) \geq 1$.

► **SOLUTION**

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que $\max(x^2, (x-2)^2) \geq 1$, c'est-à-dire $\overbrace{x^2 \geq 1}^P$ OU $\overbrace{(x-2)^2 \geq 1}^Q$.
Montrons alors $(\text{NON } P) \implies Q$.

Supposons $\text{NON } P$, c'est-à-dire $x^2 < 1$. Montrons Q , c'est-à-dire $(x-2)^2 \geq 1$.

Comme $x^2 < 1$, on en déduit alors :

$$\begin{array}{l} \text{d'où : } -1 < x < 1 \\ \text{d'où : } -3 < x-2 < -1 \\ \text{d'où : } 9 > (x-2)^2 > 1 \\ \text{d'où : } (x-2)^2 \geq 1 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par stricte décroissance} \\ \text{de la fonction} \\ \text{carrée sur } \mathbb{R}^- \end{array}$$

Conclusion : on a bien montré que pour tout $x \in \mathbb{R}, \max(x^2, (x-2)^2) \geq 1$.

Conseils

- Souvent les implications à montrer ne sont pas rédigées sous la forme « $P \implies Q$ ». Il faut donc identifier l'implication à montrer en précisant les propositions P et Q en jeu.
- Pour montrer une équivalence en raisonnant par équivalences, il faut justifier si nécessaire les équivalences écrites à chaque étape. Si l'ombre d'un doute plane, il faut démontrer l'équivalence demandée en raisonnant par double implication.
- Il faut bien comprendre la différence fondamentale entre « \implies » et « donc » :

- ▶ l'implication $P \implies Q$ signifie que « SI P est vraie, ALORS Q est vraie ». En fin de compte, on ne sait pas si les propositions P et Q sont vraies ou pas,
- ▶ la déduction « P est vraie, DONC Q est vraie » signifie :

$$[P \text{ est vraie ET } P \implies Q] \quad \text{DONC} \quad [Q \text{ est vraie}]$$

On sait que P est vraie, et on déduit que Q est vraie.

Exemple traité

Montrer : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, [x^2 + y^2 = 0] \iff [x = y = 0]$.

► SOLUTION

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrons l'équivalence suivante en raisonnant par double implication :

$$\overbrace{[x^2 + y^2 = 0]}^P \iff \overbrace{[x = y = 0]}^Q$$

- ▶ ($Q \implies P$) Supposons Q , c'est-à-dire $x = y = 0$. Montrons P , c'est-à-dire $x^2 + y^2 = 0$.
Calculons : $x^2 + y^2 = 0^2 + 0^2 = 0$.
- ▶ ($P \implies Q$) Supposons P , c'est-à-dire $x^2 + y^2 = 0$. Montrons Q , c'est-à-dire $x = y = 0$.
Comme $x^2 + y^2 = 0$, il vient : $\underbrace{x^2}_{\geq 0} = \underbrace{-y^2}_{\leq 0}$. Ainsi $x^2 = -y^2 = 0$, d'où $x = y = 0$.

Conclusion : on a bien montré que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2, [x^2 + y^2 = 0] \iff [x = y = 0]$.

Exercices

EXERCICE 1.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n est impair, alors n^2 est impair.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 1.1 On suppose n impair, i.e. il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$.
Montrer que n^2 est impair, i.e. il existe $k' \in \mathbb{N}$ tel que $n^2 = 2k' + 1$.

Solutions des exercices

EXERCICE 1.1 Montrons l'implication suivante : $\overbrace{[n \text{ impair}]}^P \implies \overbrace{[n^2 \text{ impair}]}^Q$

Supposons P , c'est-à-dire n impair, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$.
Montrons Q , c'est-à-dire n^2 impair, c'est-à-dire qu'il existe $k' \in \mathbb{N}$ tel que $n^2 = 2k' + 1$.
Remarque : k est un entier supposé connu, tandis que k' est un entier qu'on souhaite trouver.
Comme $n = 2k + 1$, il vient que $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \times (2k^2 + 2k) + 1$.
Posons $k' = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$ et on en déduit alors que $n^2 = 2k' + 1$.
Conclusion : on a bien montré que si n est impair, alors n^2 est impair.

Raisonnement par contraposée ou par l'absurde



Quand on ne sait pas !

Soit P et Q deux propositions.

- ▶ **(Implication)** On appelle implication de Q par P , et on note $P \implies Q$, la proposition $(\text{NON } P) \text{ OU } Q$.
 $P \implies Q$ se lit « P implique Q » ou encore « si P , alors Q ».
Le symbole \implies ne signifie pas « donc ».

- ▶ **(Contraposée)** La contraposée de $P \implies Q$ est l'implication $\text{NON } Q \implies \text{NON } P$.

- ▶ **(Équivalence entre une implication et sa contraposée)**

$$[P \implies Q] \iff [\text{NON } Q \implies \text{NON } P]$$

- ▶ **(Négation d'une implication)** La négation de l'implication $P \implies Q$ est :

$$\text{NON } [P \implies Q] = \text{NON } [(\text{NON } P) \text{ OU } Q] = P \text{ ET } (\text{NON } Q)$$

Que faire !

- Un raisonnement par contraposée permet de montrer une implication $P \implies Q$ en montrant sa contraposée $\text{NON } Q \implies \text{NON } P$.

Un raisonnement par l'absurde permet de montrer qu'une proposition R donnée (qui peut aussi bien être une implication que ne pas l'être !) est vraie en supposant $\text{NON } R$ et en cherchant une contradiction.

- Pour montrer une implication $P \implies Q$, on peut effectuer :
 - ▶ ou bien un raisonnement direct (cf. fiche 1),
 - ▶ ou bien un raisonnement par contraposée,
 - ▶ ou bien un raisonnement par l'absurde.

Ces deux derniers raisonnements, même s'ils peuvent servir la même cause, sont distincts sur le plan logique et sont donc à différencier. On propose ci-après une rédaction systématique pour chacun de ces raisonnements lorsqu'on souhaite montrer une implication :

Raisonnement par contraposée

Pour montrer $P \implies Q$, il suffit de montrer l'implication $\text{NON } Q \implies \text{NON } P$.

On rédige alors de la manière suivante :

Supposons $\text{NON } Q$, c'est-à-dire ... (*)

Montrons $\text{NON } P$, c'est-à-dire ... (*)

[
Raisonnement qui aboutit
à $\text{NON } P$
]

Conclusion : on a bien montré que $\text{NON } Q \implies \text{NON } P$, donc $P \implies Q$.

Raisonnement par l'absurde

Pour montrer $P \implies Q$, on suppose que cette implication est fautive et on cherche une contradiction.

On rédige alors de la manière suivante :

Supposons $\text{NON } [P \implies Q]$, c'est-à-dire P ET $(\text{NON } Q)$, c'est-à-dire ... (*)

Cherchons une contradiction.

[
Raisonnement qui aboutit
à une contradiction
]

Contradiction !

Conclusion : l'hypothèse de départ, à savoir $\text{NON } [P \implies Q]$, est fautive.

Ainsi, $P \implies Q$.

(*) À compléter en fonction des données de l'énoncé. Cette étape de traduction ne doit pas être négligée.

Conseils

- Pour montrer une implication, il faut commencer par expliciter clairement les propositions P et Q en jeu.
- Pour montrer une implication, on privilégie un raisonnement direct. S'il ne permet pas d'aboutir, alors on envisage un raisonnement par contraposée ou par l'absurde.
- Pour montrer une existence (respectivement une non-existence), on peut raisonner par l'absurde : on suppose la non-existence (respectivement l'existence), puis on cherche une contradiction.

EXEMPLE 1 Montrer qu'il n'existe pas de polynôme P à coefficients réels tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = e^x$$

► SOLUTION

Supposons qu'un tel polynôme P existe. Cherchons une contradiction.

Ce polynôme P vérifie nécessairement : $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x}P(x) = 1$ (*)

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}P(x) = 0$ car, par croissances comparées, l'exponentielle l'« emporte » sur les puissances en $+\infty$, donc sur les polynômes en $+\infty$.

Par passage à la limite en $+\infty$ dans (*), on trouve alors que $0 = 1$. Contradiction !

Conclusion : l'hypothèse de départ, à savoir l'existence d'un tel polynôme P , est fautive.

Ainsi, il n'existe pas de polynôme P à coefficients réels tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = e^x$.

Exemple traité

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer l'implication suivante :

$$[x \notin \mathbb{Q}] \implies [1 + x \notin \mathbb{Q}]$$

► SOLUTION

On commence par préciser les propositions P et Q suivantes :

$$\underbrace{[x \notin \mathbb{Q}]}_P \implies \underbrace{[1 + x \notin \mathbb{Q}]}_Q$$

► (Méthode 1 : avec un raisonnement par contraposée)

Supposons NON Q , c'est-à-dire $1 + x \in \mathbb{Q}$. Montrons NON P , c'est-à-dire $x \in \mathbb{Q}$.

Comme $1 + x \in \mathbb{Q}$, il existe $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tel que $1 + x = \frac{a}{b}$. On en déduit alors que :

$$x = (1 + x) - 1 = \frac{a}{b} - 1 = \frac{a - b}{b} \in \mathbb{Q}$$

Conclusion : on a bien montré que NON $Q \implies$ NON P , donc $P \implies Q$.

► (Méthode 2 : avec un raisonnement par l'absurde)

Supposons NON $[P \implies Q]$, c'est-à-dire P ET (NON Q), c'est-à-dire $x \notin \mathbb{Q}$ et $1 + x \in \mathbb{Q}$. Cherchons une contradiction.

Comme $1 + x \in \mathbb{Q}$, il existe $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tel que $1 + x = \frac{a}{b}$. On en déduit alors que :

$$x = (1 + x) - 1 = \frac{a}{b} - 1 = \frac{a - b}{b} \in \mathbb{Q} \quad \text{Contradiction avec l'hypothèse } x \notin \mathbb{Q}!$$

Conclusion : l'hypothèse de départ, à savoir NON $[P \implies Q]$, est fautive. Ainsi, $P \implies Q$.

Exercices

EXERCICE 2.1 Soit a_1, a_2, \dots, a_9 des nombres réels rangés par ordre croissant tels que :

$$a_1 + \dots + a_9 = 90$$

Montrer qu'il existe trois de ces nombres dont la somme est supérieure ou égale à 30.

EXERCICE 2.2 Montrer que le nombre réel $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est irrationnel.

Remarque : un nombre réel r est dit rationnel s'il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^$ tel que $r = \frac{p}{q}$. Il est dit irrationnel dans le cas contraire.*

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 2.1

Justifier qu'il suffit de montrer l'implication suivante, puis montrer la :

$$[a_1 + \dots + a_9 = 90] \implies [a_7 + a_8 + a_9 \geq 30]$$

EXERCICE 2.2

Raisonnement par l'absurde.

Solutions des exercices

EXERCICE 2.1

Si on montre que la somme des trois plus grands nombres parmi a_1, \dots, a_9 est supérieure ou égale à 30, alors on aura montré qu'il existe bien trois nombres parmi a_1, \dots, a_9 dont la somme est supérieure ou égale à 30. Comme a_1, \dots, a_9 sont rangés par ordre croissant, il suffit alors de montrer l'implication suivante :

$$\underbrace{[a_1 + \dots + a_9 = 90]}_P \implies \underbrace{[a_7 + a_8 + a_9 \geq 30]}_Q$$

Montrons l'implication $P \implies Q$ à l'aide d'un raisonnement par contraposée.

Supposons NON Q , c'est-à-dire $a_7 + a_8 + a_9 < 30$.

Montrons NON P , c'est-à-dire $a_1 + \dots + a_9 \neq 90$.

Comme a_1, \dots, a_9 sont rangés par ordre croissant, on en déduit les inégalités suivantes :

$$a_1 + a_2 + a_3 \leq a_7 + a_8 + a_9 < 30 \quad \text{et aussi} \quad a_4 + a_5 + a_6 \leq a_7 + a_8 + a_9 < 30$$

On en déduit alors : $\underbrace{a_1 + a_2 + a_3}_{< 30} + \underbrace{a_4 + a_5 + a_6}_{< 30} + \underbrace{a_7 + a_8 + a_9}_{< 30} < 90$.

En particulier : $a_1 + \dots + a_9 \neq 90$.

Conclusion : on a bien montré que NON $Q \implies$ NON P , donc $P \implies Q$.

EXERCICE 2.2

Supposons que $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est rationnel. Cherchons une contradiction.

Comme $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est de plus positif, on peut trouver $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{\ln(2)}{\ln(3)} = \frac{p}{q}$.

On a les équivalences suivantes :

$$\frac{\ln(2)}{\ln(3)} = \frac{p}{q} \iff q \ln(2) = p \ln(3) \iff \ln(2^q) = \ln(3^p) \iff 2^q = 3^p \quad \text{Contradiction!}$$

entier pair car $q \in \mathbb{N}^*$ entier impair car $p \in \mathbb{N}$

Conclusion : l'hypothèse de départ, à savoir que $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est rationnel, est fautive.

Ainsi, le nombre réel $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est irrationnel.



Quand on ne sait pas !

Qu'est-ce qu'un raisonnement par analyse-synthèse ?

Considérons un problème dont on recherche les solutions qu'on ne connaît pas. On fait alors un raisonnement par analyse-synthèse qui consiste en deux étapes bien distinctes :

- *Analyse*. Lors de cette première étape d'analyse, on suppose l'existence d'une solution au problème posé, puis on recherche des conditions nécessaires sur cette solution.
 - ▶ À l'issue de l'analyse, on obtient une liste restreinte de candidats potentiels à être solution au problème posé. Autrement dit, **SI** une solution existe, **ALORS** elle est à chercher dans cette liste de ce qu'on appelle désormais les candidats solutions.
- *Synthèse*. Lors de cette seconde et dernière étape de synthèse, on vérifie un à un si les candidats solutions trouvés lors de l'analyse sont solution ou pas au problème posé.
 - ▶ À l'issue de la synthèse, on obtient un ensemble (qui peut être vide) contenant des solutions au problème posé.

À l'issue de l'analyse ET de la synthèse, on peut conclure que l'ensemble obtenu à l'issue de la synthèse est en fait l'ensemble de toutes les solutions au problème posé.

Quand utilise-t-on un raisonnement par analyse-synthèse ?

Typiquement, le raisonnement par analyse-synthèse permet de :

- ▶ résoudre des équations (dont l'inconnue peut être un réel, une fonction, ...),
- ▶ montrer une existence OU une existence et unicité,
- ▶ déterminer une condition nécessaire et suffisante.

Que faire !

- Voici un exemple commenté d'un raisonnement par analyse-synthèse pour résoudre une équation :

EXEMPLE 1 Résoudre l'équation $\sqrt{x+6} = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.