

2018 CCMP – Physique I

Interaction laser plasma à haut éclairement

Corrigé

Commentaires

L'épreuve comporte vingt-et-une questions à traiter en 3h.

Nous pourrions conjecturer une bonne adéquation à la plage temporelle, mais il n'en est rien car chaque question numérotée comporte de multiples questions.

L'étudiant pragmatique pourrait supposer, à ce stade, qu'il peut choisir librement les parties qu'il pourra traiter dans le temps imparti. C'est une erreur car de fortes corrélations existent entre les différentes parties.

Le sujet comporte des « documents ».

En général, les documents adjoints ont une corrélation de faible densité avec le problème. Ici, les documents fournis sont distincts des traditionnels documents annexes. Il faut les considérer comme des parties du problème et ils sont à analyser avec la même pertinence que les questions. Il faut les considérer comme des parties « désordonnées » de l'énoncé. C'est une exigence rare dans les sujets de concours.

Le tout donne un sujet plus long que les sujets correspondants des années passées et dont l'analyse globale est délicate à effectuer rapidement.

Le traitement séquentiel du problème peut alors apparaître comme la solution pertinente par défaut. Il n'en est rien, certaines questions situées au milieu du sujet sont des questions de cours et il est essentiel de les aborder.

I – Génération d'harmoniques dans les gaz

I.A. – Champ laser et champ coulombien

- 1 La force électrostatique coulombienne entre deux charges ponctuelles q, q' , placées en P, P' respectivement se met sous la forme :

$$\vec{F}_{P \rightarrow P'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} qq' \frac{\overrightarrow{PP'}}{(PP')^3}$$

Nous travaillons dans le référentiel du proton, la force subie par l'électron en M et exercée par le proton placé en O vaut :

$$\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} e^2 \frac{\overrightarrow{OM}}{(OM)^3} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{u}_r}{r^2}$$

La force est centrale puisqu'elle vérifie :

$$\vec{F} \wedge \hat{u}_r = \vec{0}$$

Exploitions la relation entre force conservative et énergie potentielle : $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} W_p$

W_p est une fonction unique de r :

$$\frac{dW_p}{dr} = -F_r = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{u}_r}{r^2}$$

Nous intégrons, en supposant classiquement que la référence de potentiel est prise nulle à l'infini. Nous obtenons :

$$W_p = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

- 2 L'énergie mécanique est somme de l'énergie potentielle et cinétique. Ici l'orbite de l'électron est supposée circulaire. Utilisons le principe fondamental de la dynamique.

Nous avons $\vec{v} = v \hat{u}_\theta = r \dot{\theta} \hat{u}_\theta$, la distance au centre étant constante, l'accélération s'exprime comme :

$$\vec{a} = -r\dot{\theta}^2 \hat{u}_r + r\ddot{\theta} \hat{u}_\theta$$

Donc :

$$m \vec{a} = \vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{u}_r}{r^2}$$

Nous en déduisons le caractère uniforme $\rightarrow \ddot{\theta} = 0$

L'expression précédente permet alors d'identifier v^2 :

$$v^2 = \frac{e^2}{4\pi m \epsilon_0} \frac{1}{r}$$

L'expression de l'énergie mécanique en fonction de r est alors obtenue :

$$W_m = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

Nous en déduisons :

$$W_m = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

Commentaires

Nous retrouvons ici un résultat classique parfois dénommé « théorème du viriel » pour un mouvement circulaire d'un mobile soumis à des forces centrales Newtoniennes :

$$W_m = \frac{1}{2} W_p, \quad W_c = -\frac{1}{2} W_p$$

La description semi-classique de l'atome d'hydrogène nous assure que la norme du moment cinétique de l'électron est quantifiée et vaut : $\sigma_\Delta = mrv = n\hbar$.

Nous avons vu à la question précédente l'expression de la vitesse en fonction de r , remplaçons simplement dans la formulation du moment cinétique, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sigma_\Delta^2 &= (mrv)^2 = m^2 r^2 \frac{e^2}{4\pi m \epsilon_0} \frac{1}{r} = r \frac{m e^2}{4\pi \epsilon_0} = (n\hbar)^2 \\ r &= \frac{4\pi \epsilon_0}{m} \left(\frac{\hbar}{e}\right)^2 n^2 = a_0 n^2 \end{aligned}$$

Avec :

$$a_0 = \frac{4\pi \epsilon_0}{m} \left(\frac{\hbar}{e}\right)^2 = \frac{\epsilon_0}{m\pi} \left(\frac{h}{e}\right)^2$$

Une application numérique non requise nous confirmera la valeur du rayon de Bohr : $a_0 = 5,2 \cdot 10^{-11} \text{ m}$.

La valeur de n dans l'état fondamental est selon l'énoncé, la première valeur non nulle entière, c'est donc l'unité.

Exprimons l'énergie mécanique de l'électron dans ce cadre :

$$W_{m,n} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_n} = -\frac{m e^4}{32(\pi\epsilon_0\hbar)^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{W_0}{n^2}$$

La valeur numérique de W_0 s'obtient avec difficulté sans calculatrice. Une certaine culture scientifique vous permettra de converger vers une valeur « attendue » qui n'est autre que le Rydberg ($R_y = 13,6 \text{ eV}$).

$$W_0 = \frac{me^4}{32(\pi\epsilon_0\hbar)^2} = 14 \text{ eV}$$

- 3 Application numérique : a_0 est la valeur numérique associée à l'atome de Bohr au repos. Nous calculons :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{e} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{u}_r}{a_0^2}$$

$$E_c \approx 5.10^{11} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

Pour donner sens aux questions suivantes, il nous faut prendre connaissance du document 1.

Les données y sont multiples et leur traitement nécessite une certaine pratique. D'après les premières lignes nous savons que le laser est modélisé par une impulsion de $T = 50 \text{ fs}$. La fin du document nous permet d'identifier la valeur de l'énergie totale $W_T = 1 \text{ mJ}$.

Nous pouvons, à partir de là, déterminer la puissance :

$$P = \frac{W_T}{T} = \frac{1 \text{ mJ}}{50 \text{ fs}} = 2.10^{10} \text{ W}$$

Dans ce même document l'éclairement, qui est une puissance surfacique moyenne, est corrélé à l'amplitude du champ du laser $I = \frac{1}{2}\epsilon_0 c E^2$. Il est censé être uniforme avant la lentille, il vérifie donc :

$$P = I S = I \frac{\pi D^2}{4} = \epsilon_0 c E_\ell^2 \frac{\pi D^2}{8}$$

Soit :

$$E_\ell = \frac{1}{D} \sqrt{\frac{8P}{\epsilon_0 c}}$$

Au niveau du foyer, le faisceau est représenté par une forme complexe.

Nous savons, selon le document, que le rayon actif du faisceau à hauteur du foyer vaut R_0 . Ce rayon est corrélé par l'énoncé à α et λ_0 . L'angle α est obtenu grâce à la figure 1.c :

$$\tan \alpha = \frac{D}{2f'}$$

L'énoncé nous précise que :

$$\tan \alpha \approx \frac{\lambda_0}{\pi R_0}$$

Nous pouvons en déduire :

$$R_0 = \frac{2\lambda_0 f'}{\pi D}$$

Et

$$P = I S = I \frac{\pi R_0^2}{4} = \epsilon_0 c E_f^2 \frac{\pi R_0^2}{8} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_f^2 \left(\frac{\lambda_0 f'}{D} \right)^2$$

Soit :

$$E_f = \frac{D}{\lambda_0 f'} \sqrt{\frac{2P}{\epsilon_0 c}}$$

Un calcul approché de E_f nous donne : $E_f \approx 5.10^{10} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$

Le champ obtenu est inférieur au champ de Coulomb, l'arrachement et l'ionisation sont pourtant effectifs. Nous pouvons en conclure qu'un modèle statique n'est pas idéal pour comprendre et analyser correctement des phénomènes de l'ordre de la femtoseconde.

Commentaires

Ce processus d'analyse est long et d'autant plus laborieux que les calculatrices sont interdites dans le sujet. Un préparateur avisé aura sauté cette question avec la légèreté qui s'impose.

I.B – Un mécanisme en trois étapes

L'énoncé nous invite à prendre connaissance du document II.

□4 Deux approches possibles :

La version simple. Le mouvement est, selon l'énoncé, selon l'axe x ; z est donc nul. Circulez, il n'y a rien à voir et rien à négliger.

La version plus complexe.

Le terme $k_0 z$ représente le déphasage du déplacement spatial de l'électron, il sera négligeable si le terme est très petit devant l'unité de phase. Le déplacement de l'électron doit donc être faible devant la longueur d'onde du laser. Ce n'est pas à priori immédiat !

Supposons que c'est le cas, le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'électron s'écrit alors :

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -e \vec{E}$$

Si l'approximation effectuée est valable, l'équation différentielle est alors linéaire et nous pouvons la résoudre dans le champ complexe en posant $\underline{r} = r_f e^{i\omega_0 t}$. Elle s'écrit alors :

$$\underline{r} = \frac{e}{m\omega_0^2} \underline{E}$$

Or $\omega_0 = \frac{2\pi c}{\lambda_0}$, donc :

$$\underline{r} = \frac{e\lambda_0^2}{4\pi^2 m c^2} \underline{E}$$

L'amplitude maximale d'ondulation doit être très inférieure à λ_0 , ce qui nous amène à la condition :

$$\begin{aligned} \lambda_0 &\gg r_0 \\ \lambda_0 &\ll \frac{4\pi^2 m c^2}{e E_f} \end{aligned}$$

Application numérique : $\frac{4\pi^2 m c^2}{e E_f} \approx 4.10^{-5} \text{ m}$

La condition est vérifiée car $\lambda_0 = 8.10^{-7} \text{ m}$ et nous pouvons donc valider l'approximation permettant de négliger le caractère ondulatoire spatial du champ.

□5 Nous reprenons l'expression de la question 1, et nous l'exprimons sur l'axe x . Nous avons $r = |x|$:

$$W_p = - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|x|}$$

C'est une fonction hyperbolique, et elle semble bien correspondre à la figure II.a.

- 6 Nous rappelons sur la demande de l'énoncé, l'expression de la force de Lorentz sur l'électron :

$$\vec{F} = -e (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Nous faisons de même pour la « relation de structure » d'une onde électromagnétique plane harmonique :

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} (\vec{k} \wedge \vec{E})$$

L'énoncé ne précisant pas dans quel cadre l'appliquer, nous avons l'obligation de rester sous la forme la plus générale possible. Dans le vide, et pour cette onde nous pourrions écrire :

$$\vec{B} = \frac{\hat{u}_z}{c} \wedge \vec{E}$$

$$\vec{B} = \frac{E_f}{c} \cos(\omega_0 t - k_0 z) \hat{u}_y$$

La force de Lorentz est toujours conservative.

La composante magnétique ne travaille jamais, elle sera de plus ici négligeable car les vitesses mises en jeu ne sont pas relativistes.

Le phénomène ne sera associé à des forces conservatives que si nous pouvons négliger les chocs entre particules. Vu la valeur des déplacements électroniques, ce sera ici le cas.

La force de Lorentz sur l'axe x s'exprimera comme :

$$\vec{F}_{las} = -e E_f \cos(\omega_0 t) \hat{u}_x$$

L'énergie potentielle associée est égale à :

$$W_{p,las} = x e E_f \cos(\omega_0 t)$$

Commentaires

La notion d'énergie potentielle relève ici d'un abus de langage, elle n'a de sens que si on peut négliger la fluctuation temporelle du champ et considérer, de fait, ce dernier comme uniforme.

Nous en déduisons l'énergie potentielle totale :

$$W_{p,tot} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|x|} + x e E_f \cos(\omega_0 t)$$

Le champ électrique sur la figure II.b est étudié à un moment où sa composante est négative sur l'axe x . Nous ajoutons une droite décroissante à la figure II.a.

- 7 L'extraction d'ionisation peut se faire de chaque côté de l'axe x . Aussi bien dans la configuration II.b que II.c pour le potentiel. Elle est d'autant plus facile que nous approchons les extrema du champ électrique.

Recherchons la position correspondant au maximum de W_p , à l'instant le plus favorable.

Pour $x > 0$, cela correspond à :

$$W_{p,tot} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x} - x e E_f$$

Une analyse de sa dérivée nous donne l'extremum recherché :

$$\frac{dW_{p,tot}}{dx} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^2} - e E_f$$

Soit :

$$\tilde{x}_0 = \sqrt{\frac{e}{4\pi\epsilon_0 E_f}}$$

Application numérique : $\tilde{x}_0 = 2.10^{-10} \text{ m}$

L'ordre de grandeur est celui d'un atome et est cohérent.

Nous exprimons :

$$W_{p,tot}(\tilde{x}_0) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\tilde{x}_0} - \tilde{x}_0 e E_f = -\sqrt{\frac{e^3 E_f}{\pi\epsilon_0}}$$

Pour que l'ionisation soit effective il faut que l'énergie totale soit supérieure au seuil d'ionisation qui est associé à $-W_0$. La valeur du champ électrique à atteindre est donc égale à :

$$E_{fi} = \frac{\pi\epsilon_0}{e^3} W_0^2 = 3,3.10^{10} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

Le champ au foyer de la lentille est suffisamment intense pour assurer l'ionisation.

Pour conclure, il faut comparer à R_0 pour un gaz, et nous assurer de la focalisation adaptée du laser :

$$R_0 = \frac{2\lambda_0 f'}{\pi D} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

Comme la dimension de la zone d'émission privilégiée est inférieure à la dimension de la zone d'existence du laser nous pouvons conclure au « bon fonctionnement » du dispositif !

- 8 Deuxième étape du mécanisme : selon le document II, l'électron, libéré de l'attraction du noyau est accéléré par le champ laser.

L'ionisation se produit à l'instant t_i et l'électron est à ce moment au niveau du noyau $x_0 = 0$.

Nous appliquons de nouveau le principe de la dynamique en négligeant la dimension spatiale de l'onde laser :

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -e \vec{E}$$

Vu les conditions initiales, le mouvement se limite à l'axe x .

$$m \ddot{x} = -e E_f \cos(\omega_0 t)$$

Une simple intégration nous donne \dot{x} , en considérant qu'à l'instant initial la vitesse est nulle :

$$\dot{x} = -\frac{e}{m\omega_0} E_f (\sin(\omega_0 t) - \sin(\omega_0 t_i))$$

Pour que x_0 soit négligeable il faut qu'il soit très faible devant la dimension de l'oscillation qui est donnée par $\frac{e}{m\omega_0^2} E_f$. Nous avons de fait :

$$x(t) = -\frac{e}{m\omega_0^2} E_f (\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega_0 t_i)) - \omega_0 (t - t_i) \sin(\omega_0 t_i)$$

- 9 Troisième étape du mécanisme : L'électron revient sur le noyau et se recombine avec celui-ci en émettant un photon dur.

L'énergie cinétique de l'électron lors de son retour vaut :

$$W_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) = \frac{1}{2} m \left(\frac{e}{m\omega_0} E_f \right)^2 (\sin(\omega_0 t) - \sin(\omega_0 t_i))^2 = \frac{1}{2m} \left(\frac{e E_f}{\omega_0} \right)^2 (\sin(\omega_0 t) - \sin(\omega_0 t_i))^2$$

La valeur moyenne de l'énergie cinétique est obtenue en exploitant le classique résultat de la moyenne du carré d'une fonction trigonométrique qui vaut $\frac{1}{2}$. Donc :

$$\begin{aligned} \langle (\sin(\omega_0 t) - \sin(\omega_0 t_i))^2 \rangle &= \langle (\sin^2(\omega_0 t) - 2 \sin(\omega_0 t_i) \sin(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t_i)) \rangle \\ &= \frac{1}{2} + 0 + \sin^2(\omega_0 t_i) \end{aligned}$$

$$\langle W_c \rangle = \frac{1}{2m} \left(\frac{eE_f}{\omega_0} \right)^2 \left(\frac{1}{2} + \sin^2(\omega_0 t_i) \right)$$

D'après l'énoncé, le photon émis correspond à une énergie maximale égale à :

$$\Delta E = W_{c,max} + W_0 = h\nu$$

L'énoncé nous invite à l'interpréter comme l'indétermination maximale en fréquence (ou en énergie, ce qui est identique à un facteur dimensionnel près). Nous utilisons la relation d'indétermination de Heisenberg pour le temps et l'énergie :

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

Soit pour $\delta T = \Delta t_{min}$:

$$\delta T = \frac{\hbar}{2(W_{c,max} + W_0)} = 1,6 \cdot 10^{-18} \text{ s}$$

Les impulsions sont d'une extrême brièveté !

- 10 Le signal étudié est périodique, il est d'amplitude bornée, il peut donc se décomposer sous la forme d'une somme infinie de sinusoides de fréquences multiples d'une fréquence fondamentale $\nu_0 = \frac{1}{T_0}$.

Nous pouvons donc, dans un premier temps, chercher le comportement des formes harmoniques du signal et nous intéresser à des expressions du type :

$$s(t) = S_0 \cos \omega t$$

Où $\omega = n\omega_0$ est une composante harmonique du signal.

Les deux formes d'ondes évoquées correspondent à des ondes progressives se propageant en s'éloignant du lieu de désexcitation électronique.

Pour l'onde se propageant du côté des x positifs associée à $x > 0$, nous avons $s_+(0, t) = s_0(t)$. A la distance x , les signaux sont reçus avec un retard temporel qui vaut x/c , nous aurons donc :

$$s_+(x, t) = s_0 \left(t - \frac{x}{c} \right)$$

Soit avec la version réduite sinusoidale :

$$s_+(x, t) = s_0 \left(t - \frac{x}{c} \right) = S_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right)$$

Nous reprenons la même démarche pour l'onde se propageant du côté des x croissants associée à $x < 0$. Nous partons de $s_-(0, t) = -s_0 \left(t - \frac{T_0}{2} \right)$.

La position de cote x est atteinte x/c plus tard.

Nous en déduisons :

$$s_+(x, t) = -s_0 \left(t - \frac{x}{c} - \frac{T_0}{2} \right) = -S_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} - \frac{T_0}{2} \right)$$

Le signal sera d'amplitude maximale quand les deux signaux sont en phase, ce qui sera vérifié dès que leur déphasage est un multiple de 2π . Or :

$$\Delta\varphi = 2\pi n = \frac{\omega T_0}{2} - \pi = \frac{\omega}{\omega_0} \pi - \pi$$

Soit :

$$\omega = (2n + 1)\omega_0$$

Ce sont donc les harmoniques impairs qui seront les plus faciles à détecter.

Commentaires

Une démarche directe sur les fonctions est bien entendu possible :

$$s(x, t) = s_+(x, t) + s_-(x, t) = S_0 \left(\cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) - \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} - \frac{T_0}{2} \right) \right)$$

$$s(x, t) = -2 S_0 \sin \left(\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) - \frac{\omega T_0}{4} \right) \sin \frac{\omega T_0}{4}$$

La résolution de $\sin \frac{\omega T_0}{4} = \pm 1$ nous amène de même à :

$$\omega = (2n + 1)\omega_0$$

Le spectre obtenu va être constitué essentiellement d'harmoniques impairs, son fondamental est celui du laser, une période caractéristique de l'ordre de la femto seconde. Son spectre s'étend sur plusieurs ordre de grandeur si on prendre δT comme base d'estimation.

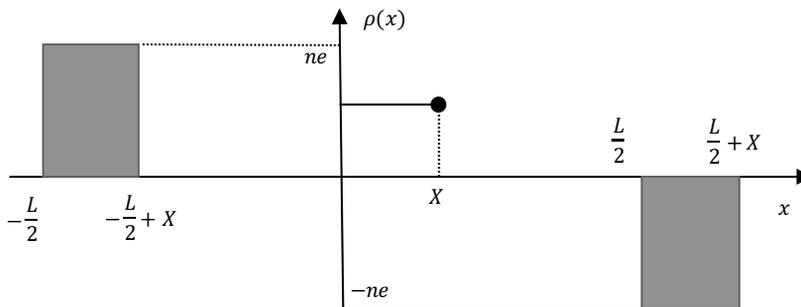
Près de trois ordres de grandeurs sont attendus, le spectre est donc très étendu (harmonique de seuil de l'ordre du millier d'unités).

II. – Génération d'harmoniques sur un miroir plasma

□11 La densité volumique de charges est nulle sur tout l'espace sauf sur les zones de non recouvrement.

Entre $[-\frac{L}{2}, -\frac{L}{2} + X]$ elle est dominée par les ions et vaut $\rho = ne$, entre $[\frac{L}{2}, \frac{L}{2} + X]$ elle est dominée par les électrons et vaut $\rho = -ne$.

Elle se représente de la manière suivante :



Densité volumique de charges

Pour déterminer le champ, nous exploitons l'équation locale de Maxwell-Gauss. La dépendance paramétrique et la symétrie nous assure que : $\vec{E}(M, t) = E(x, t) \hat{u}_x$.