

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH
SUPAERO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES DE SAINT-ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ENSAE PARISTECH (FILIERE MP)
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIERE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 2011

PREMIÈRE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Filière MP

(Durée de l'épreuve: 3 heures)

L'usage de la calculatrice est autorisé

Sujet mis à disposition des concours : Cycle international, ENSTIM, TELECOM INT, TPE-EIVP

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

PHYSIQUE I — MP.

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages.

- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il est invité à le signaler sur sa copie et à poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il aura été amené à prendre.
- Il ne faudra pas hésiter à formuler les commentaires (incluant des considérations numériques) qui vous sembleront pertinents, même lorsque l'énoncé ne le demande pas explicitement. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.

TRANSPORTS PLANÉTAIRES

Ce problème étudie divers aspects physiques du voyage à l'échelle planétaire. Il est composé de deux parties indépendantes, la première envisage le déplacement d'un train dans un tunnel creusé dans la sphère terrestre, la seconde étudie la montée d'un ascenseur le long d'un câble vertical fixé à l'équateur. Dans tout le problème la Terre est assimilée à un corps sphérique homogène de rayon r_T , de centre O_T et de masse volumique homogène μ_T .

Pour les applications numériques on prendra $\mu_T = 5,50 \cdot 10^3 \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $r_T = 6,38 \cdot 10^6 \text{m}$, et on utilisera 3 chiffres significatifs. On rappelle la valeur de la constante universelle de la gravitation de Newton $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$. Les vecteurs sont surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires \hat{u}_i ou d'une flèche dans le cas général \vec{OP} . Une quantité surmontée d'un point désigne la dérivée totale par rapport au temps de cette quantité $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$.

I. — Le métro gravitationnel

Dans toute cette partie on néglige tous les effets de la rotation de la terre sur elle-même et on se place dans le référentiel géocentrique que l'on supposera galiléen.

I.A. — Etude préliminaire

On considère un point P situé à l'intérieur de la sphère terrestre. On note $\vec{O_T P} = \vec{r} = r \hat{u}_r$ et $\vec{g}(P)$ le champ gravitationnel créé par la terre en P .

□ **1** — Justifier que $\vec{g}(P)$ est porté par \hat{u}_r et que son module ne dépend que de r , on notera donc $\vec{g}(P) = g(r) \hat{u}_r$. En utilisant le théorème de Gauss gravitationnel déterminer l'expression de $g(r)$ en fonction de $\omega^2 = \frac{4}{3} \pi G \mu_T$ et r .

□ 2 — Dédurre de la question précédente que la force de gravitation s'exerçant sur un point de masse m situé en P dérive de l'énergie potentielle

$$E_p(r) = E_{p_0} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$$

où E_{p_0} est une constante qui dépend de la référence choisie et que l'on ne demande pas d'expliciter. Quelle est la dimension de ω ?

I.B. — Le tunnel droit

On relie deux points A et B de l'équateur terrestre par un tunnel cylindrique traversant la Terre selon le schéma de la figure 1 qui présente également les notations utilisées.

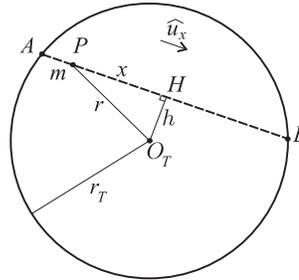


FIG. 1 – Le tunnel droit

On considère un mobile ponctuel P de masse m se déplaçant dans le tunnel sous l'effet du champ gravitationnel terrestre. La position du mobile est repérée sur le segment $[AB]$ par la coordonnée x telle que $\overrightarrow{PH} = x \hat{u}_x$ où le vecteur unitaire \hat{u}_x est colinéaire à \overrightarrow{AB} et de même sens et H est la projection orthogonale de O_T sur $[AB]$. On note finalement $h = O_T H$.

Dans toute la partie I, on suppose que le point P reste en permanence dans l'axe du tunnel grâce à un système de confinement. Il n'y a donc pas de contact avec les parois et donc pas de frottement avec celles-ci. Un tel confinement est envisageable en utilisant des parois magnétiques ! On suppose enfin qu'un vide suffisamment poussé a été créé dans le tunnel. Sous toutes ces hypothèses, on considérera que la seule force qui s'applique au mobile est la force de gravitation qu'exerce sur lui la terre.

À l'instant $t = 0$, on abandonne le mobile au point A sans vitesse initiale.

□ 3 — Déterminer l'équation différentielle (linéaire) du second ordre vérifiée par $x(t)$. En déduire l'expression de $x(t)$ en fonction de h , r_T , ω et t .

□ 4 — Déterminer la valeur de la vitesse maximale atteinte par le point P sur le trajet. En quel point cette vitesse est-elle atteinte ?

□ 5 — Exprimer la durée τ_0 du trajet entre AB et calculer sa valeur numérique.

I.C. — Projet de métro

Pour desservir plusieurs points sur l'équateur, on considère un système de tunnels représentés sur la figure 2.

Un tunnel circulaire est percé à une distance r_H du centre de la Terre dans le plan de l'équateur et l'on creuse des tunnels rectilignes de descente ou de remontée $A_1 H_1$, $A_2 H_2$, etc... Ces tunnels se raccordent au tunnel circulaire interne en des points H_1, H_2, \dots . Chaque jonction est tangentielle, c'est-à-dire que $A_1 \overrightarrow{H_1} \cdot O_T \overrightarrow{H_1} = A_2 \overrightarrow{H_2} \cdot O_T \overrightarrow{H_2} = \dots = 0$. Les points H_1, H_2, \dots sont équipés d'un système d'aiguillage

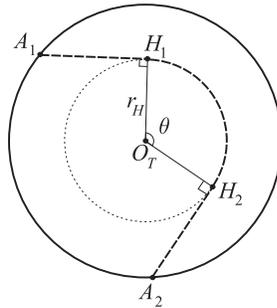


FIG. 2 – Le système de tunnels

assurant la continuité du vecteur vitesse de la rame de transport des voyageurs lors du transfert entre le tunnel de descente ou de remontée et le tunnel circulaire.

On assimile cette rame à un point matériel P de masse m astreint à circuler dans l'axe du tunnel et sans contact avec ses parois grâce au système de confinement. À l'instant $t = 0$, on laisse tomber une rame du point A_1 et sans vitesse initiale.

❑ 6 — Quelle est la nature du mouvement de la rame sur le trajet circulaire interne H_1H_2 . Déterminer la vitesse de la rame sur cette portion, en déduire que la durée τ_1 du transfert de H_1 vers H_2 se met sous la forme

$$\tau_1 = \frac{\theta}{\omega} f(y)$$

où $y = r_T/r_H$ et f est une fonction que l'on déterminera.

❑ 7 — Déterminer la durée totale τ du voyage de A_1 vers A_2 en fonction de θ , ω et y . Déterminer la valeur numérique de τ pour un voyage tel que $\theta = \pi/3$ avec $r_H = r_T/2$. Comparer les caractéristiques de ce voyage avec son équivalent à la surface de la terre.

❑ 8 — Avec un diamètre moyen de 7 m, évaluer la quantité de déblais à évacuer pour creuser le tunnel circulaire, ainsi qu'un tunnel radial. Commenter le résultat obtenu.

L'une des nombreuses hypothèses nécessaires à la réalisation d'un tel projet est la création et le maintien d'un vide suffisant dans le tunnel. En fait, ce vide ne peut être que partiel sur un tel volume et le tunnel contient de l'air de densité volumique de masse ρ maintenu à la pression p et à la température ambiante. Ce dernier point serait à discuter dans le cadre d'une étude plus complète que nous ne mènerons pas ici. On supposera que p et ρ sont constantes dans l'enceinte du tunnel et que l'air s'y comporte comme un gaz parfait. Pour cette étude on se place dans le cas du mouvement dans le tunnel circulaire.

Des expériences d'aérodynamique montrent que le mouvement d'un solide dans un gaz au repos est soumis à une force de frottement, dite traînée. Cette traînée dépend de la taille caractéristique L et de la vitesse v du solide ainsi que de la densité ρ du gaz dans lequel s'effectue le mouvement.

❑ 9 — En effectuant une analyse dimensionnelle, déterminer l'expression de cette force de frottement.

□ 10 — On note \mathcal{P} la puissance développée par la traînée subie par la rame de métro lorsqu'elle circule dans la portion circulaire du tunnel. Déterminer la pression qu'il faut maintenir dans le tunnel afin que \mathcal{P} soit comparable à la puissance que développe la force de traînée dans le cas d'une rame de TGV circulant à la vitesse de $360 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ à la surface de la terre. On supposera qu'en dehors de la vitesse la rame de métro et la rame de TGV possèdent les mêmes caractéristiques physiques. Commenter le résultat obtenu.

FIN DE LA PARTIE I

II. — Ascenseur spatial

Ce problème étudie certains aspects physiques de la réalisation d'une idée récurrente dans de nombreux contextes « l'ascenseur spatial ». Il s'agit d'un mécanisme permettant de s'extraire du champ de pesanteur terrestre sans utiliser de fusée. On suppose pour cela qu'un câble réalisé par filage de nanotubes de carbone, de plus de 100 000 km de long, inextensible, a pu être dressé à la verticale d'un point de l'équateur de la Terre. Ce câble possède une masse linéique $\lambda = 1,00 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}$ extrêmement faible et une résistance mécanique extrêmement forte par rapport à un câble en acier, qui le rend capable de supporter de très fortes tensions sans casser. Dans cette partie, le référentiel terrestre est en rotation uniforme autour de l'axe des pôles par rapport au référentiel géocentrique supposé galiléen. Il effectue un tour en un jour sidéral de durée $T_\sigma = 8,62 \cdot 10^4 \text{ s}$. La terre est toujours supposée sphérique et homogène de masse $m_T = \frac{4}{3}\pi r_T^3 \mu_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.

II.A. — Étude de l'équilibre du câble

Les notations sont celles de la figure 3 : Le point d'ancrage E du câble est un point de l'équateur terrestre, r_T est le rayon de la Terre et O_T son centre. L'altitude d'un point M du fil est notée z , $r = r_T + z$ est le rayon $O_T M$ et h est la hauteur totale du câble. Le point H représente l'extrémité haute du câble : $z_H = h$ et $r_H = r_T + h$. Ce point est libre. On pourra enfin utiliser le vecteur unitaire $\hat{u}_r = \vec{O_T M} / r$.

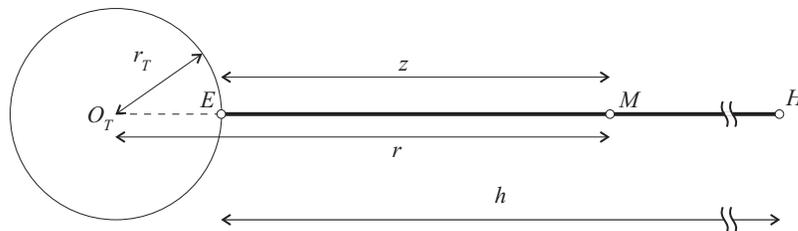


FIG. 3 – Vue générale de la Terre et du câble

□ 11 — Rappeler la définition de l'orbite géostationnaire terrestre. Établir l'expression littérale du rayon r_s correspondant à cette orbite en fonction de la masse m_T de la terre, de G et de la pulsation sidérale terrestre $\omega_\sigma = \frac{2\pi}{T_\sigma}$.

Dans toute la suite du problème, on considèrera un câble de longueur totale $h = 4r_s - r_T$, on a donc $O_T H = r_H = 4r_s$. On note g_s le module du champ de gravitation en $r = r_s$, c'est-à-dire la quantité telle que $f_s = mg_s$ où f_s est le module de la force de gravitation subie par un corps de masse m situé en $r = r_s$. Enfin, on note g le module du champ de gravitation en $r = r_T$.

□ 12 — En écrivant que le câble est en équilibre, montrer que la dérivée de la tension du câble en M vérifie la relation

$$\frac{dT}{dr} = \chi \left[\frac{r_s^2}{r^2} - \frac{r}{r_s} \right]$$

où χ est un paramètre que l'on exprimera en fonction de λ et g_s . En admettant que $T(r_H) = 0$, déterminer l'expression de la tension $T(r)$ en fonction de χ , r et r_s .

□ 13 — Déterminer les valeurs numériques de r_s , g_s de la tension du fil au point d'ancrage notée $T_E = T(r_T)$, ainsi que la valeur maximale T_{\max} de $T(r)$. Commenter le résultat obtenu, on pourra par exemple se « servir » de la question 8, on donne aussi le module d'Young de l'acier $\epsilon_a = 210$ GPa et d'un câble en nanotubes de carbone $\epsilon_c = 1$ TPa.

II.B. — Montée de la cage d'ascenseur le long du fil

Le système de propulsion de la cage est modélisé sur la figure 4. La montée est assurée par la rotation en sens inverses de deux gros cylindres de caoutchouc identiques, chacun de rayon $R_c = 1,00$ m, de masse $m_c = 2,00 \cdot 10^3$ kg, de moment d'inertie par rapport à son axe $J = \frac{1}{2}m_c R_c^2$. Ces cylindres sont mûs par un moteur électrique exerçant sur chacun un couple. Le moment résultant de ce couple est $\vec{\Gamma}_g = +\Gamma_0 \hat{u}_y$ pour le cylindre de gauche et $\vec{\Gamma}_d = -\Gamma_0 \hat{u}_y$ pour le cylindre de droite. Les deux cylindres serrent le câble grâce à un ressort reliant leurs centres. La longueur à vide $\ell_0 = R_c$ et la constante de raideur k du ressort permettent d'assurer un roulement sans glissement au contact du câble. On prend $f_s = 0,5$ pour le coefficient de frottement statique entre le caoutchouc des cylindres et le câble. On néglige les masses de la cage, de ses occupants et des moteurs par rapport à celle des cylindres.

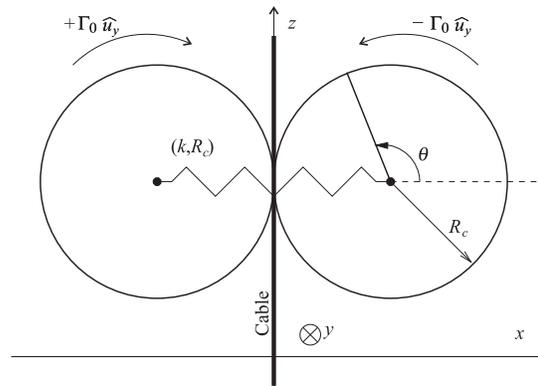


FIG. 4 – Vue générale des cylindres assurant la montée de la cage

On négligera toute action de l'air (frottement et vent) sur le système.

Dans le référentiel $(E, \hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z)$ avec $\hat{u}_z = \hat{u}_r$ la cage, repérée par le point M , est en E à $t = 0$. La montée de $z = 0$ (où la vitesse est nulle) à $z = h$ dure au total $t_m = 4$ jours et se décompose en une phase d'accélération constante d'intensité $a = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ pendant une durée t_0 suivie d'une phase à vitesse constante de module v_0 .

□ 14 — Calculer les valeurs numériques de la durée t_0 , de la vitesse v_0 et de l'altitude z_0 atteintes à la fin de la première phase. On vérifiera que $z_0 \ll h$.

□ 15 — Justifier le fait que l'on puisse considérer que pendant la première phase, la force de gravitation exercée par la Terre sur le système est sensiblement constante et négliger une des forces par rapport à celle-ci.

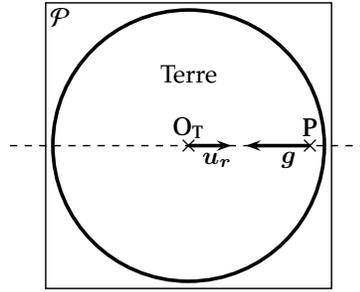
- **16** — Expliquer comment la montée du système le long du fil peut affecter la verticalité du câble au cours de sa montée. Proposer un moyen technique de remédier à ce problème.
Dans toute la suite de cette partie, on supposera que le fil reste parfaitement immobile, vertical, tendu et on négligera la ou les forces susceptibles d'affecter la verticalité du fil.
- **17** — L'angle de rotation du cylindre de droite est noté θ , compté positivement comme indiqué sur la figure 4, le vecteur vitesse angulaire de ce cylindre est donc $\vec{\Omega} = -\dot{\theta}\hat{u}_y$. On prend $\theta = 0$ pour $z = 0$. Établir la relation entre θ et z .
- **18** — Établir l'expression littérale du moment Γ_0 que doit exercer le moteur agissant sur ce cylindre pour assurer la montée pendant la première phase (accélérée) du mouvement en fonction de m, R_c, g et a . Effectuer l'application numérique.
- **19** — Donner l'expression littérale de la valeur minimale de la constante de raideur k du ressort assurant le roulement sans glissement du cylindre de droite sur le fil pendant la première phase (accélérée) du mouvement. Effectuer l'application numérique.
- **20** — Justifier par un calcul numérique que la montée du système n'affecte pas sensiblement la tension du fil dans la première phase.

FIN DE LA PARTIE II

FIN DE L'ÉPREUVE

I - Le métro gravitationnel

1 Soient \mathcal{P} et \mathcal{P}' deux plans contenant O_T et P (la trace de \mathcal{P}' est indiquée en pointillés sur la figure). Ils sont plans de symétrie pour la distribution de masse car la Terre est supposée sphérique et de masse volumique homogène. Au point P , \mathbf{g} appartient aux deux plans car le champ de gravitation est un vecteur polaire. Or $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = (O_T P)$ est portée par \mathbf{u}_r donc $\mathbf{g}(P) = g(P)\mathbf{u}_r$.



En coordonnées sphériques, $\mathbf{g}(P) = g(r, \theta, \varphi)$. Or la distribution de masse est invariante par rotation autour de n'importe quel axe passant par O_T donc $\mathbf{g}(P) = g(r)$ et $\mathbf{g}(P) = g(r)\mathbf{u}_r$.

Appliquons le théorème de Gauss à la sphère de centre O_T et de rayon $r = O_T P$:

$$\oiint_{\text{sphère}} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi G m_{\text{int}} \Rightarrow \mathbf{g}(r) \times 4\pi r^2 = 4\pi G \times \frac{4}{3}\pi r^3 \mu_T$$

En posant $\omega^2 = \frac{4}{3}\pi G \mu_T$, nous obtenons $\mathbf{g}(r) = -\omega^2 \mathbf{r}$.

RAPPEL : Dans le théorème de Gauss, les vecteurs surface $d\mathbf{S}$ sont orientés vers l'extérieur de la surface : $d\mathbf{S} = dS\mathbf{u}_r$. Ainsi $\mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = g dS$ et \mathbf{g} peut être sorti de l'intégrale car $\mathbf{g} = g(r)$ est constant sur la sphère d'intégration.

2 Exprimons le travail élémentaire de la force de gravitation $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ qui s'exerce sur la masse m en P lorsqu'elle se déplace de $d\mathbf{r}$:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = m\mathbf{g}(r)\mathbf{u}_r \cdot (dr\mathbf{u}_r + r d\theta\mathbf{u}_\theta + r \sin\theta d\varphi\mathbf{u}_\varphi) = m\mathbf{g}(r)dr = -m\omega^2 r dr$$

qui est une différentielle totale exacte. Le travail de \mathbf{F} ne dépend pas du chemin suivi (force conservative) et l'on peut donc lui associer une énergie potentielle

définie par $dE_p = -\delta W = m\omega^2 r dr$. L'intégration donne $E_p(r) = E_{p0} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$.

La comparaison du dernier terme avec l'expression de l'énergie cinétique indique que $r\omega$ est une vitesse donc ω est l'inverse d'un temps ou une pulsation.

3 On considère que seule la force de gravitation travaille donc le théorème de l'énergie mécanique appliqué au mobile s'écrit :

$$\Delta(E_c + E_p) = 0$$

REMARQUE : On considère que la force de frottement due à l'air est négligeable si le vide est suffisant et que les forces magnétiques de confinement ne travaillent pas.

Entre **A** et **P**, l'égalité s'écrit :

$$\left(\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + E_{p0} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2\right) - \left(0 + E_{p0} + \frac{1}{2}m\omega^2 r_T^2\right) = 0 \Rightarrow \mathbf{v}^2 = \omega^2 (r_T^2 - r^2)$$

H est un point fixe dans le référentiel terrestre donc le vecteur vitesse de **P** est :

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{HP}}{dt} = -\dot{\mathbf{x}}\mathbf{u}_x \Rightarrow \mathbf{v}^2 = (-\dot{\mathbf{x}})^2 = \dot{\mathbf{x}}^2$$

De plus $r^2 = \mathbf{x}^2 + \mathbf{h}^2$ donc $\dot{\mathbf{x}}^2 = \omega^2 (r_T^2 - \mathbf{h}^2 - \mathbf{x}^2)$.

Dérivons cette équation différentielle :

$$2\dot{\mathbf{x}}\ddot{\mathbf{x}} = -2\omega^2\mathbf{x}\dot{\mathbf{x}} \Rightarrow \dot{\mathbf{x}}(\ddot{\mathbf{x}} + \omega^2\mathbf{x}) = 0$$

donc $\dot{\mathbf{x}} = 0$ (solution triviale : **P** reste en **A**) ou $\ddot{\mathbf{x}} = -\omega^2\mathbf{x}$. On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique libre non amorti dont les solutions sont :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A} \cos(\omega t) + \mathbf{B} \sin(\omega t)$$

Avec $\dot{\mathbf{x}}(0) = 0$ et $\mathbf{x}(0) = \sqrt{r_T^2 - \mathbf{h}^2}$, nous obtenons $\mathbf{x}(t) = \sqrt{r_T^2 - \mathbf{h}^2} \cos(\omega t)$.

4 Sur le trajet **AB**, le mobile a donc un mouvement identique à celui d'un oscillateur centré en **H**, d'amplitude **AH** et de période $T = 2\pi/\omega$. La vitesse est maximale en **H** et $v_{\max} = (-\dot{\mathbf{x}})_{\max} = \omega \sqrt{r_T^2 - \mathbf{h}^2}$.

5 Le trajet **AB** dure une demi-période donc $\tau_0 = \pi/\omega = 2,53 \cdot 10^3 \text{ s} = 42 \text{ min } 14 \text{ s}$.

6 Sur le trajet circulaire ($r = \text{cste}$), $\Delta E_p = 0$ car E_p ne dépend que de r . Le théorème de l'énergie mécanique (voir la question 3) conduit à $\Delta E_c = 0$. Le mouvement de la rame sur cette portion est donc uniforme, de vitesse $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{H}_1) = \omega \sqrt{r_T^2 - r_H^2}$ d'après le résultat de la question 4.

La distance parcourue de **H**₁ à **H**₂ est $\mathbf{d} = r_H \theta$ (θ en radian). La durée τ_1 est :

$$\tau_1 = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{v}} = \frac{r_H \theta}{\omega \sqrt{r_T^2 - r_H^2}} = \frac{\theta}{\omega} \frac{1}{\sqrt{(r_T/r_H)^2 - 1}}$$

soit $\tau_1 = \frac{\theta}{\omega} f(y)$ avec $f(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}$ et $y = \frac{r_T}{r_H}$.

7 La durée pour aller de **A**₁ à **H**₁ et de **H**₂ à **A**₂ est égale à $\frac{T}{4} + \frac{T}{4} = \frac{T}{2} = \tau_0$, d'où :

$$\tau = \tau_0 + \tau_1 \Rightarrow \tau = \tau_0 \left(1 + \frac{\theta}{\pi} f(y)\right)$$

Pour $\theta = \pi/3$ rad et $y = 2$, on calcule $\tau = 3,02 \cdot 10^3 \text{ s} = 50 \text{ min } 22 \text{ s}$.