

Chapitre I

LES MILIEUX FLUIDES

1. GENERALITES

D'une façon générale, la *mécanique des fluides* tente d'expliquer et de modéliser les mouvements et plus généralement les comportements d'un milieu fluide évoluant sous l'effet d'actions diverses (forces, énergies) liées au milieu lui-même du fait de ses propriétés intrinsèques ou (et) provenant de milieux extérieurs.

1.1 Milieux solides et fluides

L'action de forces extérieures sur un corps quelconque provoque un déplacement global et une déformation de ce corps. Le déplacement global affecte l'ensemble du corps sans modifier les distances mutuelles de ses différents éléments ; il se réduit à des translations et des rotations. Une déformation implique un déplacement relatif des différents éléments entraînant une variation de leur distance mutuelle.

Un milieu solide caractérisé par de fortes liaisons intermoléculaires générant une quasi-immobilité de ses composants élémentaires est très peu sensible aux forces tendant à le déformer (élasticité, plasticité) et il conserve une forme et un volume propres sous l'action de ces forces.

Au contraire, dans un système fluide (liquide, gaz), les déplacements relatifs de ses éléments peuvent être importants, même sous l'effet de forces peu intenses. Cette propriété caractérise l'état fluide qui ne présente donc pas de forme propre. Toutefois, dans un milieu liquide, les forces intermoléculaires sont encore suffisamment intenses pour que les distances intermoléculaires restent faibles et quasi-constantes, si bien que les liquides conservent un volume propre et sont pratiquement incompressibles.

Les milieux gazeux dans lequel les particules élémentaires (atomes, molécules,...) sont très éloignées les unes des autres et n'interagissent qu'occasionnellement au cours de leur déplacement sont donc très extensibles et compressibles, sans présenter de volume propre.

Bien entendu, malgré ces différences, il existe une certaine continuité entre les trois états de la matière (état pâteux, par exemple) .

1.2 Méthode générale d'étude des milieux fluides

Comme toute matière, les fluides sont des milieux discrets au niveau microscopique, mais il est évident que l'étude de leur mouvement et de leur interaction avec les milieux adjacents (parois ou interfaces) nécessite, au niveau macroscopique, de considérer un ensemble statistique de particules élémentaires et donc d'adopter le concept de milieu continu. On considère donc le système fluide comme composé de cellules élémentaires ou

« particules fluides » dont chacune possède un certain nombre de grandeurs propres (masse, volume, vitesse, température, etc). Cependant, seules les grandeurs qui ne dépendent pas de la façon dont le fluide a été divisé sont utilisables et caractéristiques de la position M de la particule considérée. Ainsi, la masse et le volume d'une particule fluide élémentaire, soit dm et dv respectivement dépendent du système de division choisi, mais leur rapport $\rho = dm/dv$ n'en dépend pas pourvu que dv soit suffisamment petit.

Il est évident que les dimensions d'une particule fluide doivent être suffisamment grandes pour contenir un grand nombre de molécules ou autres particules élémentaires ; ceci ne pose généralement pas de problème puisque, par exemple, on sait qu'un mm^3 d'air contient environ 10^{16} molécules dans les conditions normales de température et de pression. Ces dimensions doivent être aussi suffisamment faibles pour que la particule puisse être caractérisée par des grandeurs ou propriétés macroscopiques *locales*, comme précisé ci-dessus. Ces propriétés peuvent alors être considérées comme des fonctions continues de l'espace et du temps auxquelles on peut appliquer les règles du calcul différentiel et intégral. Ainsi, si en un point M à l'instant t , on a une certaine valeur pour la propriété Q , on a au point infiniment voisin M' à l'instant infiniment voisin t' , la valeur Q' , telle que $Q'(r', t') = Q(r + dr, t + dt)$.

1.3 Grandeurs caractéristiques des milieux fluides

Les grandeurs physiques locales, caractérisant donc chaque particule fluide, sont liées aux concepts fondamentaux de masse, quantité de mouvement et énergie. On peut donc définir en chaque point du fluide une *masse volumique* ρ , une *vitesse* V et une *énergie interne* e . Ce sont les *grandeurs d'état* principales du système. Elles représentent respectivement la masse des molécules contenues dans l'unité de volume, la vitesse moyenne de cet ensemble et l'énergie moyenne par unité de masse provenant des mouvements moléculaires de translation, rotation et vibration. D'autres grandeurs d'état plus particulières peuvent aussi être définies (dans le cas d'un mélange homogène par exemple). La connaissance de ces grandeurs en tout point et à chaque instant permet donc de connaître l'état et l'évolution d'un système fluide.

Cette évolution va dépendre des contraintes extérieures imposées au système (forces extérieures, apport d'énergies diverses, ...), mais aussi des échanges qui ont lieu entre chaque particule fluide et ses voisines ; ces échanges de masse, de quantité de mouvement et d'énergie sont dus au flux de molécules passant d'une particule à l'autre. Ainsi, le flux de masse est essentiellement lié à l'existence de composants différents au sein du fluide (mélange) et donne lieu au phénomène de *diffusion*. Le flux de quantité de mouvement crée des forces internes entre particules fluides ; ces forces ont des composantes normales et tangentielles, si bien que ces dernières tendent à entraîner (ou freiner) les particules voisines donnant lieu ainsi au phénomène de *viscosité*. Enfin, les échanges d'énergie interne entre particules sont à l'origine du phénomène de *conduction*.

Ainsi, comme il existe des grandeurs d'état, il existe des grandeurs liées à ces propriétés. Ce sont des *grandeurs de transport*. Celles-ci varient beaucoup selon les fluides considérés et aussi selon la dynamique propre de l'écoulement étudié.

2. EVOLUTION D'UN SYSTEME FLUIDE

Pour décrire l'état et l'évolution d'un système fluide, il faut préciser d'abord les conditions physiques du problème : nature du (ou des) fluide(s), système de référence, conditions aux limites (délimitation par des parois ou des interfaces), conditions initiales,

etc. On applique ensuite à une particule fluide les principes généraux de la mécanique et de la thermodynamique, en tenant compte des échanges possibles avec les particules voisines et des contraintes extérieures éventuelles ; on applique ainsi à cette particule le principe de conservation de la masse, le principe de la conservation de la quantité de mouvement ou principe fondamental de la dynamique et le principe de la conservation de l'énergie ou premier principe de la thermodynamique : on aboutit ainsi à des équations différentielles que l'on doit ensuite intégrer dans le domaine considéré (chapitres suivants) .

2.1 Représentation du mouvement

On considère en un point M d'un fluide une particule fluide à l'instant t_1 et soit V_1 sa vitesse. A l'instant t_2 , en M passe une autre particule de vitesse V_2 . Le mouvement du fluide est déterminé si l'on connaît la fonction $V(\mathbf{r}, t)$, où \mathbf{r} représente la coordonnée généralisée du point M et V la dérivée temporelle de \mathbf{r} , soit $V = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$, ou encore si l'on connaît ses composantes sur trois axes rectangulaires adaptés à la géométrie du milieu fluide considéré. Ainsi, dans un système de coordonnées cartésiennes Ox, Oy, Oz , où \mathbf{r} a pour coordonnées respectives x, y, z , les composantes respectives de la vitesse sont les suivantes

$$u = u(\mathbf{r}, t) = \frac{dx}{dt}, \quad v = v(\mathbf{r}, t) = \frac{dy}{dt}, \quad w = w(\mathbf{r}, t) = \frac{dz}{dt} \quad (1)$$

Le lieu des positions occupées successivement par la particule qui à un instant donné t se trouvait en un point donné M s'appelle la *trajectoire* de cette particule (Fig.1). Une image des trajectoires est fournie par la photographie, avec un temps de pause (assez) long de fines particules solides en suspension dans le fluide en mouvement .

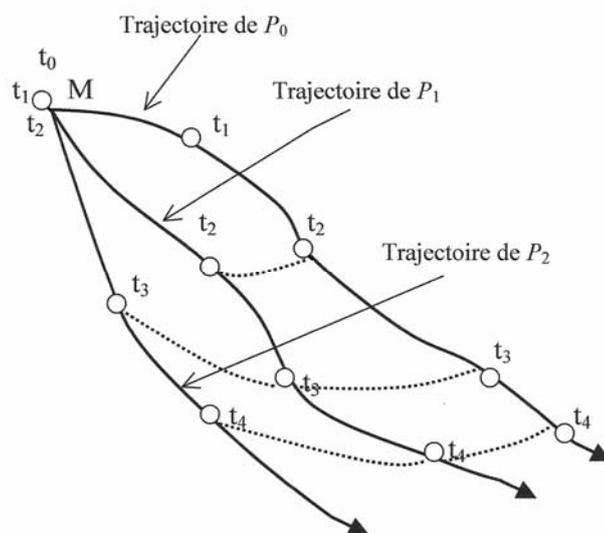


Fig.1. Trajectoires de particules fluides (... : lignes d'émission)
 P_0 : Particule passant en M à t_0 , P_1 : Particule passant en M à t_1 , etc

D'autre part, on définit une *ligne de courant* comme toute ligne qui, à un instant t , admet comme tangente en chaque point un vecteur vitesse (Fig.2). Les lignes de courant

peuvent donc changer avec le temps et elles ne coïncident généralement pas avec les trajectoires.

Leur équation s'écrit $\mathbf{V} \wedge d\mathbf{s} = 0$, (2)

ou, en coordonnées cartésiennes par exemple

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} , \quad (3)$$

où dx, dy, dz sont les composantes de $d\mathbf{s}$.

Une image des lignes de courant est fournie par la photographie, avec un temps de pause très court, de fines particules solides en suspension dans le fluide.

Un ensemble de lignes de courant s'appuyant sur une courbe fermée constitue un tube de courant.

On appelle aussi ligne d'émission , relative à un point M et à un instant t , le lieu des positions occupées à cet instant par toutes les particules fluides qui sont passées au point M au cours du mouvement : une ligne d'émission peut être matérialisée par un filet coloré émis au point M ; celui-ci représente à un instant quelconque la ligne d'émission relative au point M à cet instant.

Si le mouvement est permanent, c'est à dire indépendant du temps, les trajectoires, les lignes de courant et les lignes d'émission sont confondues : ce sont des courbes fixes.

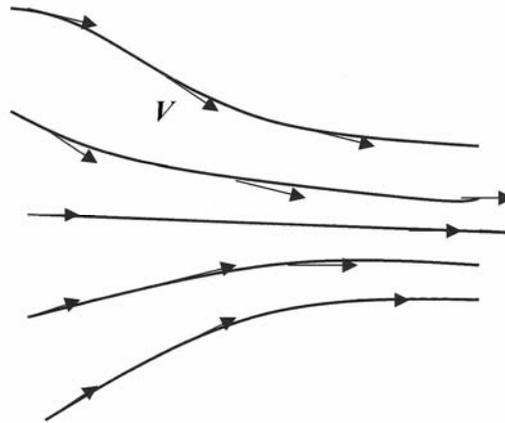


Fig.2. Lignes de courant à un instant donné

2.2 Dérivation particulière

On considère une particule fluide et une grandeur quelconque g attachée à cette particule (variable d'état par exemple) ; on veut connaître l'évolution de $g(\mathbf{r}, t)$ avec cette particule. En supposant que la fonction g est continue et dérivable, la variation totale dg pendant le temps dt est

$$dg = \frac{\partial g}{\partial t} dt + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (4)$$

Comme $\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$, on a

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \frac{\partial g}{\partial \mathbf{r}} \quad (5)$$

$\frac{dg}{dt}$ représente la variation de la quantité g dans la direction V pendant dt . Elle est aussi appelée la dérivée totale ou la *dérivée particulière* de g .

Si g est une quantité scalaire, $V \cdot \frac{\partial g}{\partial \mathbf{r}}$ représente le produit scalaire des vecteurs V et $\frac{\partial g}{\partial \mathbf{r}}$. Si g est une quantité vectorielle, $V \cdot \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{r}}$ représente le produit contracté du vecteur V et du tenseur $\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{r}}$ (annexe B1).

En particulier, l'expression de l'accélération représentant la dérivée totale de la vitesse, soit $\frac{dV}{dt}$ est la suivante

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + V \cdot \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \quad (6)$$

On peut écrire cette expression sous une autre forme en définissant une grandeur (vectorielle) $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \wedge V$, (ou $\frac{1}{2} \text{rot} V$) appelée *vecteur tourbillon* et qui représente une vitesse de rotation angulaire. On trouve ainsi après quelques manipulations (annexe B2)

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge V + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{V^2}{2} \right) \quad (7)$$

Une ligne de tourbillon est une ligne qui, à chaque instant, admet en chaque point comme tangente le vecteur tourbillon en ce point et a donc comme équation $\boldsymbol{\Omega} \wedge d\mathbf{s} = 0$. Un ensemble de lignes de tourbillon s'appuyant sur une surface fermée constitue un tube de tourbillon.

2.3 Cas particuliers d'écoulement

- *Écoulements permanents* (ou stationnaires)

Les grandeurs caractéristiques de l'écoulement Q en chaque point ne dépendent pas du temps :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \quad (8)$$

- *Écoulements irrotationnels* (ou à potentiel)

Le vecteur tourbillon est identiquement nul. Alors

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{V^2}{2} \right) \quad (9)$$

- *Écoulements bidimensionnels*

Les grandeurs de l'écoulement ne dépendent que de deux variables spatiales. On distingue les *écoulements plans* où l'écoulement reste le même dans des plans parallèles, c'est à dire qu'en coordonnées cartésiennes, on a par exemple :

$w = 0$, $\frac{\partial}{\partial z} = 0$, et les *écoulements de révolution* (ou axisymétriques) où, par raison de

symétrie, l'écoulement ne dépend que de deux variables ; ainsi, par exemple en coordonnées cylindriques, on peut avoir $v_\theta = 0$, $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ (annexe B2).

- *Écoulements monodimensionnels*

Les grandeurs de l'écoulement ne dépendent plus que d'une seule variable spatiale, soit par exemple que ces grandeurs restent inchangées dans des plans perpendiculaires à la direction de l'écoulement, soit que l'on ne considère qu'une valeur moyenne dans ces plans, soit aussi qu'il n'existe qu'une seule composante de vitesse ne dépendant que d'une seule variable.

2.4 Etude lagrangienne d'un écoulement

La méthode précédente, consistant à étudier l'évolution de la particule fluide en un point donné (§ 4.1) est appelée description eulerienne ou méthode du volume de contrôle, puisqu'en ce point le fluide se renouvelle ; on cherche ainsi, à l'aide des équations de la mécanique (et de la thermodynamique) le champ de vitesse dans tout le domaine considéré ainsi que les autres grandeurs caractéristiques. C'est la méthode généralement utilisée.

Toutefois, il est possible d'utiliser une autre méthode, consistant à individualiser une particule fluide et à la suivre dans son mouvement : c'est la description lagrangienne ou méthode de la masse de contrôle. Ainsi, si à un instant considéré t_0 , la particule P se trouve au point de coordonnée généralisée \mathbf{r}_0 , elle se trouvera à un instant ultérieur t au point \mathbf{r} , tel que

$$\mathbf{r} = F(\mathbf{r}_0, t) \quad (10)$$

La connaissance de la fonction F détermine donc le mouvement.

Il est bien entendu possible de passer d'une description à l'autre : ainsi, par exemple, si l'on connaît la fonction lagrangienne F , on a

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dF}{dt}(\mathbf{r}_0, t) \quad , \quad (11)$$

d'où

$$\mathbf{r}_0 = \varphi(\mathbf{r}, t) \quad (12)$$

En reportant l'expression (12) dans (11), on a $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$.

De même, si on connaît la fonction eulerienne $\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$, on peut, par intégration, en déduire $\mathbf{r} = G(\mathbf{C}, t)$, où \mathbf{C} est un vecteur constant que l'on peut déterminer en fonction de \mathbf{r}_0 à l'instant initial puisque $\mathbf{r}_0 = G(\mathbf{C}, 0)$.

3. FLUIDES PARFAITS. FLUIDES REELS

Traditionnellement, l'étude des écoulements est divisée en deux parties ; les traits essentiels de ces écoulements sont d'abord décrits en négligeant ou en schématisant un certain nombre de propriétés du milieu fluide en écoulement, c'est la *mécanique des fluides parfaits*. La prise en compte de ces propriétés et leur conséquence constitue la *mécanique des fluides réels*. On précise ci-après les différences entre les deux approches.

3.1 Forces subies par les particules fluides

Comme on l'a indiqué plus haut, les forces subies par une particule fluide peuvent provenir de deux sources :

- Les forces provenant des particules fluides extérieures . Comme ce sont des forces d'origine moléculaire, leur rayon d'action est limité et on admet donc qu'elles ne s'exercent que sur les molécules de la surface de la particule fluide considérée : ce sont donc des forces proportionnelles aux éléments de surface ; on les appelle donc des forces de surface.
- Les forces provenant de sources extérieures au fluide (pesanteur, champ magnétique,...). Elles sont généralement proportionnelles aux éléments de volume ; on les appelle donc des forces de volume.

3.2 Action des forces de surface. Tension et pression

On considère dans un fluide une surface infiniment petite dS entourant un point M . Si dF est la force de surface agissant sur dS , on appelle *tension* en M le vecteur τ tel que

$$\tau = \lim \left(\frac{dF}{dS} \right)_{dS \rightarrow 0} \quad (13)$$

Le vecteur τ peut être décomposé en trois composantes, deux dans le plan de l'élément de surface, ce sont les composantes tangentielles, et la troisième perpendiculaire à dS , c'est la composante normale. Les composantes tangentielles proviennent du glissement avec frottement des particules fluides les unes sur les autres (viscosité) et, pour un fluide donné, sont d'autant plus importantes que les gradients de vitesse sont importants.

Si l'on considère donc un écoulement où les gradients de vitesse sont relativement faibles, on peut admettre que seule la composante normale reste significative : cette composante s'appelle la pression, notée p . On peut alors montrer qu'elle ne dépend que de la position du point M (et éventuellement du temps) mais non de l'orientation de la surface considérée.

En effet, si on prend comme particule fluide autour du point M un cylindre élémentaire de section droite dS (Fig.3), on a par définition $dF = p dS$. Sur une autre base du cylindre dS' formant avec dS l'angle α , on a aussi $dF' = p' dS'$. D'autre part, la résultante des forces sur les parois latérales est nulle.

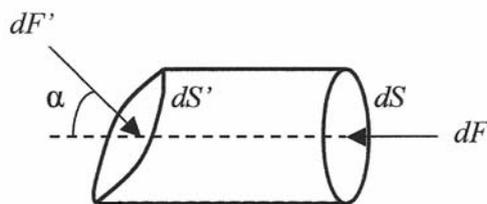


Fig.3. Forces de pression sur une particule fluide cylindrique

Comme par ailleurs, les forces extérieures éventuelles et les forces d'inertie sont du 3^{ème} ordre, alors que les forces de surface sont du 2^{ème}, l'équilibre des forces sur le cylindre s'écrit simplement

$$p dS = p' dS' \cos \alpha \quad (14)$$

Or, comme $dS = dS' \cos \alpha$, on a

$$p = p' \quad (15)$$

La pression en un point M d'un fluide est la même dans toutes les directions : c'est une grandeur scalaire ne dépendant que de la position de M , et du temps éventuellement.

3.3 Fluide parfait ou fluide réel

On peut déjà imaginer que, si on néglige les composantes tangentielles de la tension, l'étude d'un écoulement en sera profondément simplifiée et comme ceci est possible en particulier lorsque les gradients de vitesse sont « faibles », on pourra alors considérer que cet écoulement est un écoulement de fluide parfait. Cet aspect concerne les transferts de quantité de mouvement entre particules fluides.

Un autre aspect concerne les transferts d'énergie interne entre particules : on imagine aisément qu'ils sont liés aux différences de température entre ces particules ; alors, si les gradients de température sont faibles on peut aussi négliger ces transferts, ce qui revient à dire qu'alors le fluide n'est pas conducteur de la chaleur. De même, pour un mélange, les échanges de masse peuvent être négligés si les gradients de concentration sont faibles.

En résumé, le fluide est considéré comme parfait si les phénomènes de viscosité, conduction et diffusion sont négligés.

Bien sûr, ces restrictions s'appliquent à la frontière de ces fluides, c'est à dire aux parois ou interfaces : ainsi aucun transfert de masse ou de chaleur n'est possible entre un fluide parfait et un milieu adjacent. En ce qui concerne les transferts de quantité de mouvement, seuls ceux liés à la pression sont possibles.

Exercices du Chapitre I

Exercice 1**

Énoncé

Soit un champ de vitesse $V(\mathbf{r}, t)$ correspondant à un écoulement bidimensionnel instationnaire tel qu'en coordonnées cartésiennes, on ait :

$$u = \frac{x}{1+t}, \quad v = \frac{y}{1+2t}, \quad w = 0$$

- 1) Trouver l'équation de la trajectoire d'une particule, sachant qu'à $t = 0$, elle occupe la position $\mathbf{r}_0(x_0, y_0)$.
- 2) Trouver l'équation des lignes de courant à l'instant t .
- 3) Donner une représentation graphique de quelques trajectoires et lignes de courant.

Solution

- 1) Les équations paramétriques des trajectoires $\frac{dx}{dt} = u$ et $\frac{dy}{dt} = v$ s'écrivent dans un plan

$$z = Cte \quad \frac{dx}{dt} = \frac{x}{1+t}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{y}{1+2t} \quad (16)$$

En intégrant les équations (16), on a

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{x} = \int_0^t \frac{dt}{1+t} \quad \text{et} \quad \int_{y_0}^y \frac{dy}{y} = \int_0^t \frac{dt}{1+2t}$$