SUITES NUMÉRIQUES

1 COMMENT DÉFINIR UNE SUITE ?

Définition Définir une suite c'est expliciter un procédé qui permet de calculer chaque terme de la suite.

Définition explicite On donne une expression permettant de calculer u_n à partir de n.

ex. $u_n = \frac{2n+1}{n^2+2}$ pour $n \geq 0$. Alors $u_1 = \frac{2\times 1+1}{1^2+2} = \frac{3}{3} = 1$ (il suffit de remplacer la valeur de n puis d'effectuer le calcul).

Définition par récurrence On donne la valeur du premier terme et une relation permettant de passer d'un terme u_n au terme suivant u_{n+1}.

ex. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n^2+2} \end{cases}$. Pour calculer u_1 il faut alors remarquer que 1 = 0 + 1 donc en prenant n = 0 dans la deuxième égalité on obtient $u_1 = u_{0+1} = \frac{2u_0+1}{{u_0}^2+2}$. Il ne reste plus qu'à remplacer u_0 par sa valeur $u_1 = \frac{2\times 2+1}{2^2+2} = \frac{5}{6}$.

Définition à l'aide d'un algorithme Un algorithme défini une suite à partir du moment où il prend en entrée un entier n et donne à la sortie un réel.

ex. **Variables**

n un entier donné en entrée

u un réel

Traitement

Saisir n

Si n est pair **alors**

u prend la valeur $\frac{n}{2}$

sinon

u prend la valeur $\frac{n-1}{2}$

Finsi

Afficher u

TOP CHRONO
C'est l'interro !

Exercice 1.1 (6 pts) *15 min*

Dans chaque cas calculer les quatre premiers termes de la suite.

1. $u_n = \sqrt{n+1}, n \geq 0$

2. $u_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right), n \geq 0$

3. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}, n \geq 0$

4. $u_n = (-1)^n$

5. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1-u_n}{2u_n^2+1} \end{cases}$

6. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{cases}$

Exercice 1.2 (4 pts) *15 min*

On considère l'algorithme suivant :

Variables
n un entier saisi en entrée
u un réel
Traitement
u prend la valeur 1
Pour k de 1 à n **faire**
u prend la valeur 0,3u + 2
Finpour
Afficher u

1.a. Quelle est la valeur initiale de u ?

b. Quelle est la valeur de u à la sortie si n = 3 ?

2. Cet algorithme permet de définir une suite (u_n) par récurrence. Compléter sa définition par récurrence : $\begin{cases} u_0 = ... \\ u_{n+1} = ...u_n + ... \end{cases}$.

3. On décide d'utiliser un tableur pour calculer les termes de la suite :

	A	B	C	D	E	F	G	H	...
1	Valeur de n	0	1	2	3	4	5	6	...
2	Valeur de u_n		2,3	2,69		2,84	2,85	2,86	...

a. Quelle valeur faut-il entrée en B2 ?

Pour évaluer u_0 on fait le test « 0 est pair » qui est vrai, on calcule alors $\frac{0}{2}=0=u_0$.

Pour u_1 , le test « 1 est pair » est faux, on calcule donc $\frac{1-1}{2}=0=u_1$. Ainsi on a :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
u_n	0	0	1	1	2	2	3	3

b. Parmi les formules suivantes, laquelle, entrée en C2 permet par un copier-glisser vers la droite, de calculer tous les termes de la suite ?

- $0{,}3 \times C1 + 2$
- $0{,}3 \times B\$2 + 2$
- $0{,}3 \times B2 + 2$
- $0{,}3 \times B1 + 2$

Exercice 1.3 (6 pts) *20 min*

1. Écrire un algorithme qui permet de calculer le terme de rang n de la suite :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1} \end{cases}.$$

2. On considère l'algorithme suivant :

Variables
n entier donné en entrée
v un réel
Traitement
v prend la valeur $\dfrac{3n-2}{n+1}$
Afficher v

a. Cet algorithme définit une suite (v_n). Quelle est l'expression de cette suite ?

b. Comment le modifier pour qu'il affiche aussi le terme de rang n de la suite (w_n) définie par $w_n = 3v_n - 1$?

3. On considère l'algorithme suivant :

Variables
n entier donné en entrée
a,b,c trois réels
Traitement
a prend la valeur 0
b prend la valeur 1
Pour k de 1 à n **faire**
c prend la valeur a
a prend la valeur 2a + 3b
b prend la valeur b – c
Finpour
Afficher a,b

À l'aide d'un tableau des variables, quelles sont les valeurs de a et b pour n = 4 ?

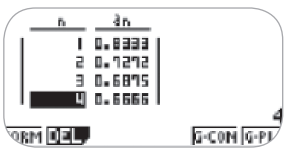
2 COMMENT CONSTRUIRE LA REPRÉSENTATION GRAPHIQUE D'UNE SUITE ?

Construire la représentation graphique d'une suite consiste à placer les points de coordonnées $(n;u_n)$ dans un repère.
On peut aussi utiliser un tableur ou la calculatrice. Le graphique permet d'obtenir des informations sur la suite de manière visuelle. Avec la calculatrice, on peut obtenir la table des valeurs puis le graphique :

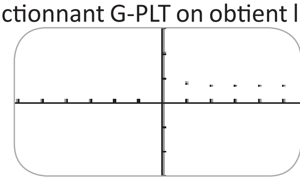
Pour les suites définies explicitement :

Soit u la suite définie par $u_n = \dfrac{3n+2}{5n+1}$.

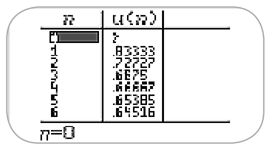
Casio : En utilisant le menu RECUR et le type an=, on entre la formule. Puis on peut faire afficher la table de 21 premières valeurs (en précisant dans RANG le dernier rang).



Puis en sélectionnant G-PLT on obtient le graphique :



TI : Il faut paramétrer la calculatrice dans MODE et sélectionner Seq au lieu de Func. Puis dans Y=, entrer la formule. Faire afficher la table.

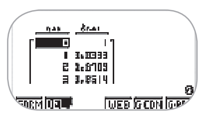


Puis d'appuyer sur plot.

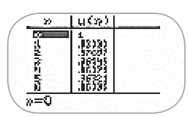
Pour les suites définies par récurrence :

Soit u définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{5u_n + 1}$.

Casio : En utilisant le menu RECUR et la type an+1=, on entre la formule. Il ne faut pas oublier de préciser les paramètres dans RANG et entrer la valeur initiale a0. Puis on fait afficher la table des 21 premières valeurs. Il suffit ensuite d'appuyer sur G-PLT.



TI : On entre la formule en décalant bien les indices de termes (u_{n+1} devient u_n et u_n devient u_{n-1}) et en précisant la valeur du premier terme. Puis on fait afficher la table.



TOP CHRONO
C'est l'interro !

Exercice 2.1 (4 pts) *10 min*

Faites afficher à l'écran de votre calculatrice la représentation graphique des cinq premiers termes des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{(-2)^n}{n}, n \geq 1$

2. $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{v_n + 1} \end{cases}$

Exercice 2.2 (5 pts) *10 min*

On considère la suite u définie par $u_n = n^2 - n + 1$ pour $n \geq 1$.

1. Quelle est l'expression de la fonction *f* telle que $u_n = f(n)$?

2.a. Tracer la courbe représentative de la fonction *f* sur [-5 ; 5].

b. Utiliser cette courbe pour obtenir la représentation graphique de la suite u pour n de 0 à 5.

Exercice 2.3 (3 pts) *15 min*

On considère la suite *u* définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$.

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite.

2.a. Construire la représentation graphique de cette suite pour n de 0 à 4.

b. Valider votre graphique à l'aide de la calculatrice.

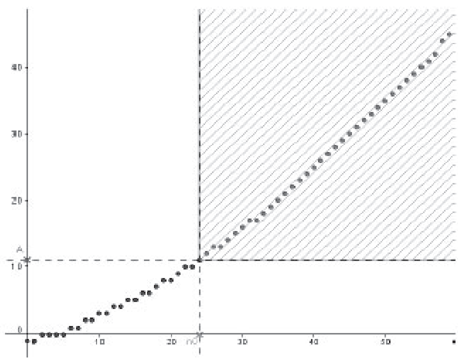
3 QU'EST-CE QU'UNE LIMITE INFINIE ?

Considérons le tableau suivant donnant quelques termes de la suite $u_n = n^3$:

n	0	1	10	100	10^5	10^{10}
u_n	0	1	1000	10^6	10^{15}	10^{30}

On remarque que les valeurs de u_n deviennent de plus en plus grandes quand n augmente. Quand des valeurs deviennent de plus en plus grandes, on dit qu'elles tendent vers $+\infty$.

Définition On dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si pour tout entier naturel p on peut trouver un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont supérieurs à 10^p. On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.



ex. $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

Pour vérifier le critère de la définition, on peut s'intéresser à la recherche de seuil c'est-à-dire l'entier à partir duquel $u_n > 10^p$ avec p fixé.

ex. Soit $u_n = n^2 + 2n$. Déterminons à partir de quel entier n, $u_n \geq 10^6$.

Or $u_n = n^2 + 2n = (n+1)^2 - 1$.

En effet, $(n+1)^1 - 1 = n^2 + 2n + 1 - 1 = n^2 + 2n$. Ainsi on cherche n tel que

$(n+1)^2 - 1 \geq 10^6 \Leftrightarrow (n+1)^2 \geq 10^6 + 1 \Leftrightarrow n + 1 \geq \sqrt{10^6 + 1} \Leftrightarrow n \geq \sqrt{10^6 + 1} - 1$. Or

$\sqrt{10^6 + 1} - 1 = 999{,}0005$ donc à partir du rang 1000 on a $u_n \geq 10^6$.