Chapitre 1

Techniques de calcul

Les attendus du programme de mathématiques en Terminale S n'étant pas assez axés sur les **techniques de calculs**, pourtant indispensables pour aborder efficacement les cours de mathématiques (et également de sciences physiques et de sciences de l'ingénieur), nous commencerons cet ouvrage par un chapitre consacré à ce sujet.

Les fondamentaux du cours

1 Développement - Factorisation

Proposition 1.1 (Identités remarquables)**.**
Soient a, b et c des réels quelconques. On a :

(i) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
(ii) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
(iii) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$.

Remarque. En remplaçant b par $-b$, on déduit d'autres identités remarquables.

Proposition 1.2 (Factorisation)**.**
Soient a et b des réels quelconques. On a :

(i) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$;
(ii) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$;
(iii) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$.

Proposition 1.3 (Factorisation d'un trinôme du second degré dans $\mathbf{R}$)**.**
Soient le trinôme du second degré ax^2+bx+c, avec $a, b, c \in \mathbf{R}$ et $a \neq 0$, et $\Delta = b^2-4ac$ son discriminant.

(i) *Si $\Delta = 0$, le trinôme admet une racine double $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ et pour tout réel x :*

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2.$$

(*ii*) *Si* $\Delta > 0$, *le trinôme admet deux racines réelles* $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ *et pour tout réel* x *:*

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2).$$

(*iii*) *Si* $\Delta < 0$, *le trinôme du second degré n'admet pas de racine dans* $\mathbf{R}$.

Preuve. On met sous forme canonique :

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right) \end{aligned}$$

(*i*) Si $\Delta > 0$, il vient :

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\sqrt{\Delta}^2}{4a^2}\right) \\ &= a\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right). \end{aligned}$$

(*ii*) Si $\Delta = 0$, alors :

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = a\left(x-x_0\right)^2.$$

(*iii*) Si $\Delta < 0$, on pose $\Delta = -\delta^2$ et on obtient :

$$ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{\delta^2}{4a^2}\right).$$

Donc le trinôme du second degré ne s'annule jamais sur $\mathbf{R}$.

□

Corollaire (Relations entre coefficients et racines d'un trinôme)**.**
Soient a, b *et* c *des réels quelconques avec* $a \neq 0$. *Si le trinôme du second degré* ax^2+bx+c *admet deux racines* x_1 *et* x_2, *éventuellement égales, dans* $\mathbf{R}$, *alors :*

$$x_1+x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}.$$

Preuve.
Il suffit de développer $a(x-x_1)(x-x_2)$ ou $a(x-x_0)^2$ selon la valeur de Δ, puis par identification, on déduit le résultat voulu. □

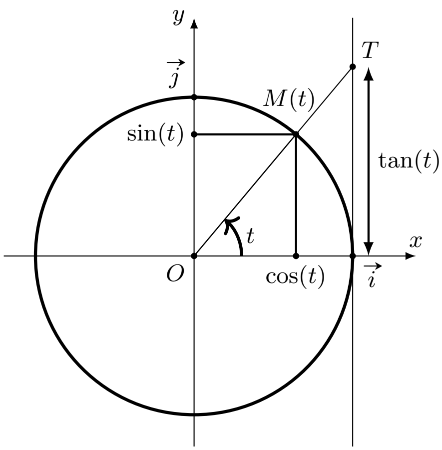
2 Puissances

Proposition 1.4 (Formulaire des puissances)**.**
Soient x, y des réels quelconques et α, β des entiers quelconques. On a :

(i) $x^0 = 1$;
(ii) $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$;
(iii) *si* $x \neq 0$, $\dfrac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$;
(iv) $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$;
(v) *si* $y \neq 0$, $\left(\dfrac{x}{y}\right)^\alpha = \dfrac{x^\alpha}{y^\alpha}$;
(vi) $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.

3 Trigonométrie

Définition 1.1 (Cercle trigonométrique)**.**
*Dans le plan rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le cercle de centre O et de rayon 1 est appelé **cercle trigonométrique**.*
Pour tout réel t, on note $M(t)$ le point du cercle trigonométrique tel que l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM(t)})$ soit égal à t. Le point $M(t)$ a pour coordonnées $(\cos(t), \sin(t))$.



Remarque. Pour un réel $t \neq \dfrac{\pi}{2} [\pi]$, la droite $OM(t)$ coupe la droite verticale d'équation $x = 1$ en un point T d'ordonnée $\tan(t)$.

Valeurs remarquables :

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(t)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(t)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(t)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	

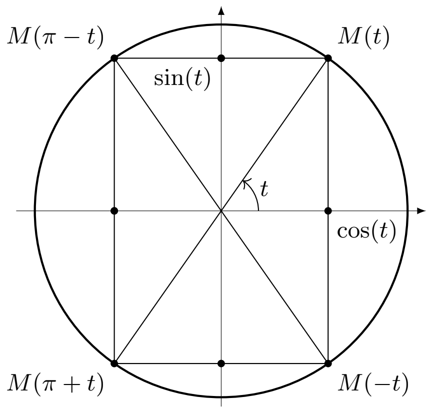
Proposition 1.5 (Formules de base).
Soit t un réel quelconque. On a :

- $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$.
- $\cos(t + 2\pi) = \cos(t)$.
- $\sin(t + 2\pi) = \sin(t)$.
- *Si* $t \neq \dfrac{\pi}{2}[\pi]$, $\tan(t) = \dfrac{\sin(t)}{\cos(t)}$.

Proposition 1.6 (Symétries).

Soit un réel t, on a :

(*i*) $\cos(-t) = \cos(t)$;
(*ii*) $\sin(-t) = -\sin(t)$;
(*iii*) $\cos(\pi + t) = -\cos(t)$;
(*iv*) $\sin(\pi + t) = -\sin(t)$;
(*v*) $\cos(\pi - t) = -\cos(t)$;
(*vi*) $\sin(\pi - t) = \sin(t)$;
(*vii*) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = \sin(t)$;
(*viii*) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = \cos(t)$.



Remarque. En cas d'existence, on a de même :

- $\tan(-t) = -\tan(t)$.
- $\tan(\pi + t) = \tan(t)$.
- $\tan(\pi - t) = -\tan(t)$.
- $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = \dfrac{1}{\tan(t)}$.

Proposition 1.7 (Formules d'addition).
Soient a et b des réels.

(*i*) $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$;
(*ii*) $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$;
(*iii*) *Sous conditions d'existence, on a :* $\tan(a + b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$.

Remarque.
En remplaçant b par $-b$, on déduit ainsi les formules suivantes :
$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$, $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$ et $\tan(a - b) = \dfrac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$.

Proposition 1.8 (Formules de duplication).
Pour un réel a, on a :

(*i*) $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$;
(*ii*) $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$;
(*iii*) *En cas d'existence,* $\tan(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$.

Méthodes

Méthode 1 : Savoir mettre sous forme canonique

Pour transformer un trinôme du second degré du type $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ en la somme (ou la différence) de deux carrés, on peut procéder comme suit :

1. écrire :
$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$
2. Si $c - \dfrac{b^2}{4a} \geqslant 0$, alors poser $d = \sqrt{c - \dfrac{b^2}{4a}}$) pour obtenir :
$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + d^2.$$
3. Si $c - \dfrac{b^2}{4a} < 0$, alors poser $d = \sqrt{\dfrac{b^2}{4a} - c}$ pour obtenir :
$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - d^2.$$

Exemple 1.1

Montrer que pour tous réels x et t, on a $x^2 + 4x + \cos(t) + 5 \geqslant 0$.

Solution

Comme $1 + \cos(t)$ est toujours positif, on écrit :
$$x^2 + 4x + \cos(t) + 5 = (x+2)^2 + 1 + \cos(t) \geqslant (x+2)^2,$$
ce qui prouve bien que pour tous réels x et t, on a $x^2 + 4x + \cos(t) + 5 \geqslant 0$.

Méthode 2 : Savoir trouver la 2^{e} racine de $ax^2 + bx + c$

Si l'on connaît une racine x_1 du trinôme ax^2+bx+c ($a \neq 0$), alors pour trouver la deuxième racine x_2 (éventuellement égale à x_1), on peut utiliser l'une des deux relations du corollaire 1 page 8 :
$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a},$$
ce qui nous permet de déduire x_2.

Remarque. Cette méthode permet de gagner du temps quand une des racines est « évidente » car il est alors inutile de calculer le discriminant pour obtenir la deuxième racine du trinôme du second degré.

Exemple 1.2

Soient $t \in \mathbf{R}$ et $P(x) = 2x^2 + (\sin(t) - 2\cos(t))x - \sin(t)\cos(t)$.
Calculer $P(\cos(t))$ et en déduire l'ensemble des racines de P.

Solution

On obtient immédiatement $P(\cos(t)) = 0$, ainsi $x_1 = \cos(t)$ est une racine de P et on en déduit que $x_2 = -\frac{b}{a} - x_1 = \frac{-\sin(t) + 2\cos(t)}{2} - \cos(t) = -\frac{\sin(t)}{2}$ est également racine de P.

✓ Pour la détermination de la seconde racine, il est préférable d'utiliser la relation $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, car la deuxième relation $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$ peut donner lieu à une division par 0.

Méthode 3 : Savoir utiliser l'expression conjuguée

Pour écrire une fraction du type $F = \frac{\alpha}{a+\sqrt{b}}$ ou $F = \frac{\alpha}{a-\sqrt{b}}$ sous la forme $F = \frac{\beta}{c}$ avec $(a,b,c) \in \mathbf{R}^3$, multiplier le numérateur et le dénominateur de F par $a - \sqrt{b}$ pour la première forme et $a + \sqrt{b}$ pour la seconde forme (appelée expression conjuguée du dénominateur) afin d'obtenir :

$$\frac{\alpha}{a+\sqrt{b}} = \frac{\alpha(a-\sqrt{b})}{a^2-b} \quad \text{et} \quad \frac{\alpha}{a-\sqrt{b}} = \frac{\alpha(a+\sqrt{b})}{a^2-b}.$$

Exemple 1.3

Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x}-1}$.

Solution

On obtient :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{x(\sqrt{1+x}+1)}{1+x-1} = \lim_{x\to 0} \sqrt{1+x}+1 = 2.$$

Méthode 4 : Savoir résoudre une équation trigonométrique

On distingue trois principaux cas :

- $\cos(a) = \cos(b) \iff \begin{cases} a = b + 2k\pi \\ \text{ou} \\ a = -b + 2k\pi \end{cases}$ avec $k \in \mathbf{Z}$.
- $\sin(a) = \sin(b) \iff \begin{cases} a = b + 2k\pi \\ \text{ou} \\ a = \pi - b + 2k\pi \end{cases}$ avec $k \in \mathbf{Z}$.
- $\tan(a) = \tan(b) \iff a = b + k\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$.

Remarque. Lorsque $a = b + 2k\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$, on note simplement $a = b\,[2\pi]$.

Exemple 1.4

> *Résoudre dans* $\mathbf{R}$ *les équations suivantes :*
> ***1/*** $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin(x)$;
> ***2/*** $\sqrt{3}\cos(x)-\sin x=-1$;
> ***3/*** $\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$.

Solution :

1/ Pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned}
\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin(x) &\iff \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\\
&\iff \left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\pm\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})\\
&\iff \begin{cases} 2x=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi \\ x+\dfrac{\pi}{4}=x-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \quad \text{(impossible)}\end{cases}\\
&\iff x=\frac{\pi}{8}+k\pi.
\end{aligned}$$

Conclusion, $S=\left\{\frac{\pi}{8}+k\pi\ ;\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

2/ Remarquons que l'on a :

$$\begin{aligned}
\sqrt{3}\cos(x)-\sin x=-1 &\iff \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)-\frac{1}{2}\sin x=-\frac{1}{2}\\
&\iff \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(x)-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\\
&\iff \sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\\
&\iff \begin{cases} \dfrac{\pi}{3}-x=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi \\ \dfrac{\pi}{3}-x=\pi+\dfrac{\pi}{6}+2k\pi \end{cases} \quad (k\in\mathbf{Z})\\
&\iff \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{2}-2k\pi \\ x=-\dfrac{5\pi}{6}-2k\pi \end{cases} \quad (k\in\mathbf{Z}).
\end{aligned}$$

Conclusion, $S=\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ;\ k\in\mathbf{Z}\right\}\cup\left\{\frac{-5\pi}{6}+2k\pi\ ;\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

3/ Pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned}
\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3} &\iff \tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\\
&\iff x=\frac{\pi}{2}+k\pi\ \ (k\in\mathbf{Z}).
\end{aligned}$$

Conclusion, $S=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ ;\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

Méthode 5 : Savoir linéariser $\cos^2(a)$, $\sin^2(a)$ et $\sin(a)\cos(a)$

- De la formule $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ on déduit la relation $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$, ce qui implique, puisque $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$, que l'on a :

$$\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2} \text{ et } \sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}.$$

- De la formule $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$ on déduit ainsi $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$, ce qui donne :

$$\sin(a)\cos(a) = \frac{\sin(2a)}{2}.$$

Exemple 1.5

Déterminer des primitives de $f : t \mapsto 2\cos^2(t) + 3\sin^2(t)$.

Solution

On écrit :

$$\begin{aligned} f(t) &= 2\cos^2(t) + 3\sin^2(t) = 1 + \cos(2t) + \frac{3}{2}(1-\cos(2t)) \\ &= \frac{5}{2} - \frac{\cos(2t)}{2} \end{aligned}$$

et on en déduit que $F : t \mapsto \frac{5}{2}t - \frac{\sin(2t)}{4} + C$ (avec $C \in \mathbf{R}$) est une primitive de f.

Exemple 1.6

Déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ *et de* $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Solution

Commençons par écrire $\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Comme $\frac{\pi}{12} \in \left]0, \frac{\pi}{6}\right[$, alors $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$. Donc $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}}$.

En utilisant la formule $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$, il vient :

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sin\left(2\times\frac{\pi}{12}\right)}{2\times\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}}} = \frac{1}{4\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}}},$$

ce qui nous donne après simplification, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

✓ On aurait pu résoudre cette question par une autre méthode. En effet, on remarque que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ et on conclut en utilisant les formules de $\cos(a-b)$ et $\sin(a-b)$.