FONCTIONS DE CLASSE C^1

La notion de classe C^1 pour une fonction numérique d'une variable réelle est présente en analyse (étude de fonctions numériques à une variable réelle, intégrations par parties) et en probabilités (fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité).

A l'aide de plusieurs exercices, nous allons travailler cette notion.

Ces exercices nous permettront de travailler les fondamentaux de l'analyse (continuité, dérivabilité, limites, dérivées).

Cours

1) Définition

Une fonction numérique f d'une variable réelle définie sur un intervalle I est dite de classe C^1 si elle est dérivable sur cet intervalle et si sa dérivée f' est continue sur cet intervalle.

2) Propriétés

a) Si f et g sont deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle I alors les fonctions $f+g$ et $f \times g$ sont de classe C^1 sur I.

Si de plus g ne s'annule par sur I, alors $\frac{f}{g}$ est de classe C^1 sur I.

b) Si f est une fonction de classe C^1 sur un intervalle I et si g est une fonction de classe C^1 sur un intervalle J contenant l'intervalle $f(I)$,alors la fonction $g \circ f$ est de classe C^1 sur l'intervalle I.

Remarque.

La fonction f étant de classe C^1 sur l'intervalle I, elle est dérivable donc continue sur cet intervalle.

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle (théorème des valeurs intermédiaires), on peut donc affirmer que $f(I)$ est un intervalle.

Exercice 1

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x telle que

$$f(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x=0 \\ \dfrac{x}{\ln x} \text{ sinon} \end{cases}$$

1) Donner l'ensemble de définition de la fonction f .
2) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
3) Justifier que la fonction f est de classe C^1 sur $[0,1[$.
4) Dresser le tableau des variations de la fonction f .
   (On y fera apparaître les différentes limites et la valeur de $f(e)$)

On considère la suite v telle que $v_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \dfrac{v_n}{\ln v_n}$

5) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq e$.
6) Justifier que la suite v converge et déterminer sa limite.

Correction

1. $\dfrac{x}{\ln x}$ existe si et seulement si $x > 0$ et $\ln x \neq 0$.

$\dfrac{x}{\ln x}$ existe si et seulement si $x > 0$ et $x \neq 1$.

$f(0)$ existe donc $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est définie sur } [0,1[\cup]1,+\infty[}$

2. Pour $x \in]0,1[, \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{\left(\dfrac{x}{\ln x}\right)}{x} = \dfrac{1}{\ln x} \underset{x\to 0}{\to} 0$ puisque $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc dérivable en 0 et } f'(0)=0}$

3. La fonction f est de classe C^1 sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$ comme quotient de fonctions de classe C^1 dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$.

- **Pour établir le caractère C^1 de la fonction f sur chaque intervalle ouvert on utilise les théorèmes généraux rappelés en début de chapitre.**

$$\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[, f'(x) = \frac{1 \times \ln x - x \times \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} = \frac{1}{(\ln x)} - \frac{1}{(\ln x)^2}$$

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\ln x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{(\ln x)^2} = 0$

Finalement $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = 0 = f'(0) \Rightarrow f'$ continue en 0.

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [0,1[.}$

4. $\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[, f'(x) = \frac{x \times \ln x - 1 \times \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$ est du signe de $\ln x - 1$:

$\ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$

$\ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow x > e$

La fonction f est dérivable donc continue en 0 : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^-} \ln x = 0^- \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^+} x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \ln x = 0^+ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$ (Limite usuelle) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$ 0	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

5. Montrons le résultat par récurrence. On note $P(n): v_n \geq e$

- Initialisation : $v_0 = 3 \geq e$, puisque $e \approx 2.718$.
- Hérédité : on suppose que pour un $n \geq 0$, $v_n \geq e$ et on veut montrer que $v_{n+1} \geq e$.

Si $v_n \geq e$, alors $f(v_n) = v_{n+1} \geq f(e) = e$ car la fonction f est croissante sur $[e, +\infty[$.

- Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq e}$

6. $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = \frac{v_n}{\ln v_n} - v_n = v_n \times \frac{1 - \ln v_n}{\ln v_n}$

$$\left.\begin{array}{c} v_n \geq e > 0 \\ v_n \geq e \Rightarrow \ln v_n \geq 1 \Rightarrow 1 - \ln v_n \leq 0 \\ v_n \geq e \Rightarrow \ln v_n \geq 1 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow v_{n+1} - v_n \leq 0$$

La suite (v_n) est décroissante et minorée par e : elle converge vers un réel $L \geq e$.

$v_{n+1} = \frac{v_n}{\ln v_n}$. On passe à la limite quand n tend vers $+\infty$: $L = \frac{L}{\ln L}$ car la fonction $\ln$ est continue en $L \geq e$.

On a donc $L = \frac{L}{\ln L} \Leftrightarrow L \ln L - L = 0 \Leftrightarrow L(1 - \ln L) = 0 \Leftrightarrow L = 0$ ou $L = e$.

Comme $L \geq e$, on a $L = e$: $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ converge vers } e.}$

Exercice 2

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{x^2}-1}{x} & \text{si} \quad x\neq 0\\ 0 & \text{si} \quad x=0\end{cases}$

1. Montrer que f est impaire et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3. Donner le tableau des variations de f.
4. En déduire l'existence d'une application réciproque de f impaire.

Correction

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ intervalle symétrique par rapport à 0 donc $\forall x\in\mathbb{R},(-x)\in\mathbb{R}$.

$$f(-x)=\begin{cases}\dfrac{e^{(-x)^2}-1}{-x}=-\dfrac{e^{x^2}-1}{x} \text{ si } x\neq 0\\ 0 \text{ si } x=0\end{cases}=-f(x) : \boxed{f \text{ est impaire}}$$

La fonction $x\mapsto e^{x^2}-1$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée et différence de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, par conséquent la fonction f est continue sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur chacun de ces intervalles.

Continuité en 0 :
$e^x-1\underset{0}{\sim}x\Rightarrow e^{x^2}-1\underset{0}{\sim}x^2$, on a donc

$f(x)\underset{0}{\sim}\dfrac{x^2}{x}=x\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x=0=f(0)$ ce qui assure la continuité de la fonction f en 0.

Conclusion : $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$

2. La fonction $x\mapsto e^{x^2}-1$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ comme composée et différence de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, par conséquent la fonction f est de classe C^1 sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$ comme quotient de fonctions de classe C^1 dont le dénominateur ne s'annule pas sur chacun de ces intervalles.

Etude en 0

a) Dérivabilité en 0

Pour $x \neq 0, \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{e^{x^2}-1}{x^2} \underset{0}{\sim} 1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$.

La fonction f est donc dérivable en 0 et $f'(0)=1$.

b) Continuité de f' en 0.

$$\forall x \in]-\infty,0[\cup]0,+\infty[, f'(x) = \frac{2xe^{x^2}x-\left(e^{x^2}-1\right)1}{x^2} = \frac{e^{x^2}\left(2x^2-1\right)+1}{x^2}$$

Pour x au voisinage de 0, $e^x = 1+x+o(x)$ donc $e^{x^2} = 1+x^2+o\left(x^2\right)$

$e^{x^2}\left(2x^2-1\right)+1 = \left(1+x^2+o\left(x^2\right)\right)\left(2x^2-1\right)+1 = x^2+o\left(x^2\right) \underset{0}{\sim} x^2$, et donc

$f'(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$.

Finalement $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = 1 = f'(0)$: la fonction f' est continue en 0.

Les conclusions de a et b permettent d'affirmer que :

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$

- **Pour établir le caractère C^1 de la fonction f sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$ on utilise les théorèmes généraux rappelés en début de chapitre.**
- **Pour établir le caractère C^1 de la fonction f sur $\mathbb{R}$, on traite le problème local en 0 en revenant à la définition d'une fonction de classe C^1.**
- **Les études de limites nécessaires à la résolution du problème se font éventuellement à l'aide d'équivalents et si nécessaire à l'aide de développements limités.**

3. Pour $x \neq 0, f'(x)$ est du signe de $g(x) = e^{x^2}\left(2x^2-1\right)+1$

Cherchons donc le signe de $g(x)$.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée, produit et différence de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 2xe^{x^2}\left(2x^2-1\right)+e^{x^2}4x = xe^{x^2}\left(4x^2-2+4\right)$

$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = xe^{x^2}(2+4x^2)$: $g'(x)$ est du signe de x.

La fonction g est donc décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$: elle admet un minimum absolu en 0 qui vaut $g(0) = 0$.

Conclusion : la fonction g est positive sur $\mathbb{R}$ et strictement positive sur $\mathbb{R}^*$.

Revenons à *f*.
Pour $x \neq 0, f'(x) > 0$, or $f'(0) = 1$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$: la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Limites à l'infini

$$\forall x \neq 0, f(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{x} = \frac{e^{x^2}}{x} - \frac{1}{x} = x \times \frac{e^{x^2}}{x^2} - \frac{1}{x}$$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x^2}}{x^2} = \lim\limits_{A \to +\infty} \dfrac{e^A}{A} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} x \times \frac{e^{x^2}}{x^2} = +\infty \text{ (en posant } A = x^2 \text{)}$$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, il vient : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{X \to +\infty} f(-X)$ (en posant $X = -x$) et donc, en utilisant l'imparité de la fonction f , il vient : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{X \to +\infty} \left[-f(X)\right] = -\infty$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-		+	
$f(x)$	$-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$

4. La fonction *f* est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$: la fonction f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

La fonction f admet donc une bijection réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$ avec $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

$$x \in \mathbb{R} \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} y \in \mathbb{R}$$

Montrons que f^{-1} est impaire. On a : $\forall y\in\mathbb{R},(-y)\in\mathbb{R}$.

$f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow y=f(x)$

$f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow -y=-f(x)$

$f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow -y=f(-x)$, car f est impaire

$f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow f^{-1}(-y)=-x$

Finalement $f^{-1}(-y)=-x=-f^{-1}(y)$: f^{-1} est impaire.

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet donc une bijection réciproque } f^{-1} \text{ impaire}}$

Exercice 3

Soit la fonction f définie sur $[0,1]$ par : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\ln(x)}{x-1} & \text{si } x\in\left]0,1\right[\\ f(0)=0 \text{ et } f(1)=1\end{cases}$

1. Etudier la continuité de la fonction f sur $[0,1]$.
2. La fonction f est-elle de classe C^1 sur $[0,1]$?
3. Dresser le tableau des variations de la fonction f sur $[0,1]$.

Correction

1. La fonction $x\mapsto x\ln(x)$ est continue sur $\left]0,1\right]$ comme produit de fonctions continues sur $\left]0,1\right]$, par conséquent la fonction f est continue sur $\left]0,1\right[$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur l'intervalle $\left]0,1\right[$.

- Continuité en 0

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to0} x\ln(x)=0\,(\text{limite usuelle})\\ \lim_{x\to0}(x-1)=-1\end{aligned}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to0} f(x)=\frac{0}{-1}=0=f(0),$$

Donc f est continue en 0.

- Continuité en 1

$\ln(x)\underset{1}{\sim}(x-1)\Rightarrow f(x)\underset{1}{\sim}x$; $\lim_{x\to1} f(x)=1=f(1)$; donc f est continue en 1.