

# TABLE DES MATIERES

## Chapitre I : Echantillonnage

### A - Rappels de cours

1. Lois de probabilités de base rencontrées en statistique	1
1.1 Définitions et caractérisations	1
1.2 Les propriétés de convergence	3
2. Statistiques et distributions d'échantillonnage	5
2.1 Le principe de l'inférence statistique	5
2.2 Cas d'une moyenne	5
2.3 Cas d'une proportion	6
2.4 Cas d'une variance	7
2.5 Récapitulatif concernant espérance, proportion, et variance	8
3. La pratique de l'échantillonnage	10

### B – Applications

1. Distributions d'échantillonnage et propriétés	11
1.1 Moyenne et variance dans le cas d'échantillons gaussiens	11
1.2 Paramètres représentatifs des statistiques décrivant la variance	16
1.3 Distribution d'échantillonnage des rapports de variances	19
1.4 Distribution d'échantillonnage des différences de moyennes	22
1.5 Distribution d'échantillonnage des différences de proportions	26
1.6 La différence entre estimation et estimateur	27
2. Exemples de méthodes d'échantillonnage	30
2.1 Les sondages aléatoires sans remplacement (exhaustifs)	30
2.2 Les sondages par stratification	33

### C – Exercices complémentaires

42

## Chapitre II : Estimation

### A – Rappels de cours

1. La problématique de l'estimation statistique	51
2. Propriétés des estimateurs ponctuels	52
2.1 Qualités d'un bon estimateur	52
2.2 Comparaison des estimateurs	52
2.3 Information de FISHER	53
2.4 Inégalité de CRAMER RAO	55
2.5 Statistiques exhaustives	56
2.6 Le cas particulier de la famille exponentielle	57

3. Construction des estimateurs	58
3.1 <i>Théorèmes de RAO-BLACWELL et LEHMANN-SCHEFFE</i>	58
3.2 <i>Méthode des moments</i>	60
3.3 <i>Méthode du maximum de vraisemblance</i>	61
3.4 <i>Méthode des moindres carrés</i>	64
3.5 <i>Espérance, proportion, variance, et covariance</i>	64
4. Estimation par intervalle de confiance	65
4.1 <i>Construction de l'intervalle de confiance</i>	65
4.2 <i>Le cas d'une moyenne</i>	66
4.3 <i>Le cas d'une proportion</i>	67
4.4 <i>Le cas d'une variance</i>	68

## **B – Applications**

1. Exemples de modèles et propriétés des estimateurs	68
1.1 <i>Modèle gaussien</i>	68
1.2 <i>Modèle de POISSON</i>	71
1.3 <i>Modèle uniforme</i>	74
1.4 <i>Modélisation d'une hauteur de crue (loi de RAYLEIGH)</i>	78
1.5 <i>Modélisation de la durée de vie de diodes (loi de WEIBULL)</i>	80
1.6 <i>Modèle de PARETO</i>	82
1.7 <i>Modèle exponentiel translaté</i>	85
2. Techniques particulières d'estimation	88
2.1 <i>Modèle mélangé POISSON/Gamma en assurance automobile</i>	88
2.2 <i>Comment estimer un paramètre intime</i>	94
2.3 <i>Comptage des poissons dans un lac (méthode de capture et recapture)</i>	96
2.4 <i>Estimateur du nombre de fraudeurs dans un transport collectif</i>	98
2.5 <i>Evaluation d'une contamination (méthode most powerful number)</i>	100
2.6 <i>Evaluation de <math>\pi</math> à travers deux méthodes de MONTE-CARLO</i>	104
3. Intervalles de confiance	108
3.1 <i>Comparaison des méthodes d'approximation pour une proportion</i>	108
3.2 <i>Sondages de popularité</i>	109
3.3 <i>Contrôle de fabrication par mesures</i>	111
3.4 <i>Intervalles de confiance d'une moyenne pour la loi de POISSON</i>	115
3.5 <i>Une méthode par simulation, le bootstrap</i>	118

<b>C – Exercices complémentaires</b>	122
--------------------------------------	-----

## **Chapitre III : Décision**

### **A – Rappels de cours**

1. Les principes généraux de la décision statistique	139
1.1 <i>L'objet des tests d'hypothèse</i>	139
1.2 <i>Les risques associés</i>	139
1.3 <i>La classification des tests</i>	141
2. Les tests paramétriques	141
2.1 <i>Hypothèses simples et multiples</i>	141
2.2 <i>La construction de la règle de décision</i>	142

2.3 Tests de conformité à une valeur standard	143
a) Le cas d'une moyenne	143
b) Le cas d'une proportion	145
c) Le cas d'une variance	145
d) Autres tests de conformité	146
e) Le cas des hypothèses composites	147
2.4 Tests de comparaison entre deux échantillons indépendants	148
a) La comparaison de variances (test de FISHER-SNEDECOR)	148
b) La comparaison de moyennes (test <i>t</i> de STUDENT)	149
c) La comparaison de proportions	151
2.5 Tests de comparaison entre deux échantillons appariés	151
2.6 Tests de comparaisons entre $K$ échantillons indépendants, ( $K > 2$ )	152
a) L'analyse de la variance (ANOVA)	152
b) Comparaison de variances (test de BARTLETT)	156
2.7 Tests progressifs	156
3. Les tests non paramétriques	158
3.1 Tests d'adéquation	158
a) Le test du Chi- Deux	158
b) Le test de KOLMOGOROV	159
c) Le test de normalité de SHAPIRO et WILK	160
d) La méthode graphique de la droite de HENRY	161
3.2 Tests de comparaison entre $K$ échantillons indépendants	162
a) Le test d'identité de KOLMOGOROV-SMIRNOV, ( $K=2$ )	162
b) Les tests d'identité de MANN-WHITNEY et WILCOXON, ( $K=2$ )	164
c) Le choix du test approprié	166
d) Le test d'identité de KRUSKAL-WALLIS, ( $K \geq 2$ )	166
3.3 Tests de comparaison entre $K$ échantillons appariés	167
a) Le test d'identité des signes, ( $K=2$ )	167
b) Le test d'identité des rangs « signés » de WILCOXON, ( $K=2$ )	169
c) Le test d'identité de MAC NEMAR, (variables binaires et $K=2$ )	170
d) Le test d'identité de COCHRAN, (variables binaires et $K \geq 2$ )	171
e) le test d'identité de FRIEDMAN, ( $K \geq 2$ )	172
3.4 Tests d'associations, ( $K=2$ )	173
a) Le coefficient de corrélation des rangs Rho de SPEARMAN	174
b) Le coefficient de corrélation des rangs Tau de KENDALL	176
c) Le test de contingence de Chi- Deux	178
 <b>B – Applications</b>	
1. Tests à un échantillon sous modèle gaussien	179
1.1 Test <i>t</i> de STUDENT et pluviométrie	179
1.2 Test de proportion et étude de marché	180
1.3 Risques client et fournisseur	181
1.4 Test séquentiel de WALD portant sur une moyenne	183
1.5 Ajustements par une loi normale	188
2. Tests à un échantillon sous autres modèles	191
2.1 Test paramétrique pour le modèle de POISSON	191
2.2 Test paramétrique pour le modèle de RAYLEIGH	194
2.3 Tests portant sur un modèle de revenus « PARETO »	199
2.4 Test paramétrique entre deux lois pour une étude de clientèle	202
2.5 Test séquentiel de WALD et contrôle de réception	205

2.6	<i>Ajustement par une loi uniforme</i>	209
2.7	<i>Tests non paramétriques de conformité à une valeur standard</i>	209
3.	Tests à deux échantillons sous modèle gaussien	213
3.1	<i>Un exemple utilisant les tests de STUDENT et de FISHER SNEDECOR</i>	213
3.2	<i>Comparaison de moyennes sur échantillons appariés</i>	216
3.3	<i>Comparaison de variances entre deux types de solutions aqueuses</i>	217
3.4	<i>Comparaison de proportions</i>	222
3.5	<i>Tables de contingences (2,2) et échantillons indépendants</i>	224
3.6	<i>Corrélation entre taille et poids (coefficient <math>r</math> de PEARSON)</i>	228
4.	Tests à deux échantillons sous autres modèles	231
4.1	<i>Test paramétrique de comparaison sous modèle exponentiel</i>	231
4.2	<i>Comparaison du test de WILCOXON avec le test paramétrique</i>	233
4.3	<i>Au sujet du traitement des ex-aequo dans les tests de rangs</i>	238
4.4	<i>Etude de tendance suivant échantillons indépendants puis appariés</i>	239
4.5	<i>Evaluation de l'efficacité d'un traitement par tests non paramétriques</i>	241
4.6	<i>Etude d'impact suivant le test de MAC NEMAR</i>	246
4.7	<i>Coefficient de contingence</i>	247
4.8	<i>Alternative au « <math>r</math> » de PEARSON, le coefficient « <math>\tau</math> » de KENDALL</i>	249
4.9	<i>Coefficient « <math>\rho</math> » de SPEARMAN</i>	252
5.	Tests à plus de deux échantillons	254
5.1	<i>Analyse de variance (test « ANOVA » de FISHER)</i>	254
5.2	<i>Test de KRUSKAL- WALLIS</i>	257
5.3	<i>Test de la médiane généralisée</i>	259
5.4	<i>Test de FRIEDMAN appliqué à un problème d'ergonomie</i>	261
5.5	<i>Comparaisons sur échantillons liés et données binaires (COCHRAN)</i>	263
<b>C – Exercices complémentaires</b>		265

## Chapitre IV : Régression

### A – Rappels de cours

1.	Régression linéaire simple	299
1.1	<i>Le modèle</i>	299
1.2	<i>Estimation des paramètres</i>	300
1.3	<i>Erreur moyenne</i>	300
1.4	<i>Interprétation du coefficient de corrélation empirique</i>	301
1.5	<i>Coefficient de détermination et analyse de la variance</i>	301
1.6	<i>Propriétés des estimateurs des coefficients de la droite de régression</i>	303
1.7	<i>Intervalles de confiance et tests pour modèle linéaire gaussien</i>	304
2.	Régression linéaire multiple	305
2.1	<i>Le modèle</i>	305
2.2	<i>Estimateurs des moindres carrés</i>	305
2.3	<i>Etude des coefficients et analyse de la variance</i>	307

### B – Applications

1.	Modèles à une variable explicative	308
----	------------------------------------	-----

---

1.1 <i>Autour de la droite de régression</i>	308
1.2 <i>Parabole des moindres carrés et distance de freinage</i>	312
1.3 <i>Equations non linéaires se ramenant au modèle linéaire (gaz parfait)</i>	314
1.4 <i>Modèle de régression (taille, poids)</i>	315
2. Modèles à plusieurs variables explicatives	316
2.1 <i>Illustration autour d'un modèle à deux variables explicatives</i>	316
2.2 <i>Matrices et régression linéaire multiple</i>	320
<b>C – Exercices complémentaires</b>	<b>326</b>
<b>Annexes</b>	
Table des valeurs de la loi normale centrée réduite	334
Table des valeurs de la loi de STUDENT	335
Table des valeurs de la loi du chi- deux de PEARSON	336
Tables de la loi de FISHER-SNEDECOR	337
Test de SHAPIRO et WILK	339
Test binomial	339
Test de WILCOXON, MANN, et WHITNEY	340
Test des rangs signés de WILCOXON	340
Test de KOLMOGOROV (pour un échantillon)	341
Test de FRIEDMAN	341
Test de KOLMOGOROV-SMIRNOV (pour deux échantillons)	342
<b>Bibliographie</b>	<b>343</b>
<b>Index</b>	
Index alphabétique	345