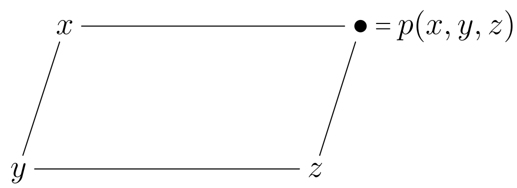
Chapitre 1

Espace de Mal'cev

On a insisté dans l'introduction sur le fait que la figure fondamentale de la géométrie affine, celle qui est la pierre angulaire de la relation *affine/vectoriel*, et plus généralement de la relation *géométrie/algèbre*, est le *parallélogramme*. C'est de là, comme on l'a annoncé, que nous allons partir. Le quatrième sommet d'un parallélogramme est déterminé par les trois autres, et peut donc se penser comme le résultat d'une opération ternaire.



C'est cette opération ternaire que nous allons étudier systématiquement.

1.1 Loi de Mal'cev

Soit X un ensemble.

Définition 1.1.0.1. *Une loi de Mal'cev sur X est une opération ternaire :*

$$p : X \times X \times X \to X,\ (x,y,z) \mapsto p(x,y,z)$$

vérifiant : $p(x,y,y) = x$ et $p(y,y,z) = z$.

Exemple 1.1.0.2. *A tout groupe $(G,\cdot,1)$ on peut associer canoniquement une loi de Mal'cev, définie par $p(x,y,z) = x \cdot y^{-1} \cdot z$*

Soit $h : G \to H$ un homomorphisme de groupes. On sait que le noyau $Kerh = h^{-1}\{1\}$ est un sous-groupe de G. En revanche, si $t_0 \in H$, $t_0 \neq 1$, l'image réciproque $\Gamma_{t_0} = h^{-1}(\{t_0\})$ n'est pas un sous-groupe du groupe G.

Exercice 1.1.0.3. Montrer que la formule $p(x, y, z) = x \cdot y^{-1} \cdot z$ définit une loi de Mal'cev sur l'ensemble $\Gamma_{t_0} = h^{-1}(\{t_0\})$.

Définition 1.1.0.4. *Une loi de Mal'cev p sur X est dite :*
1) associative à droite si on a : $p(x, y, p(y, u, v)) = p(x, u, v)$
2) associative à gauche si on a : $p(p(x, y, u), u, v) = p(x, y, v)$
3) associative lorsque ces deux conditions sont satisfaites.
On appelle espace de Mal'cev *la donnée d'un ensemble X non vide muni d'une loi de Mal'cev p qui est associative.*

Exercice 1.1.0.5. Montrer que la loi de Mal'cev sur $\Gamma_{t_0} = h^{-1}(\{t_0\})$, définie dans l'exercice précédent, est associative.

Exercice 1.1.0.6. Montrer qu'une loi de Mal'cev est associative si et seulement si on a : $p(p(x, y, z), u, v) = p(x, y, p(z, u, v))$.

Exercice 1.1.0.7. Montrer que si la loi de Mal'cev est :
1) associative à droite, on a : $t = p(x, y, z) \Leftrightarrow z = p(y, x, t)$
2) associative à gauche, on a : $t = p(x, y, z) \Leftrightarrow x = p(t, z, y)$
3) associative, on a : $p(x, p(y, z, t), u) = p(p(x, t, z), y, u)$.

Définition 1.1.0.8. *Une loi de Mal'cev p sur X est dite commutative si on a : $p(x, y, z) = p(z, y, x)$. Un espace de Mal'cev est dit commutatif lorsque la loi de Mal'cev qui le définit est commutative.*

Exercice 1.1.0.9. Montrer que la loi de Mal'cev canonique sur un groupe G définie dans l'Exemple 1.1.0.2 est commutative si et seulement si le groupe G est abélien.

Définition 1.1.0.10. *Une loi de Mal'cev p sur X est dite autonome si on a :*
$$\begin{aligned} &p(p(x, y, z), p(x', y', z'), p(x'', y'', z'')) \\ &= p(p(x, x', x''), p(y, y', y''), p(z, z', z'')) \end{aligned}$$

Exercice 1.1.0.11. Montrer que p est autonome si et seulement si la loi p est associative et commutative.

Exercice 1.1.0.12. Représenter graphiquement en terme de parallélogrammes au sens de la géométrie classique du plan tous les axiomes précédents, à savoir ceux d'une loi de Mal'cev, des associativités, de la commutativité et de l'autonomie.

1.2 Relation d'équivalence de Chasles

Soit p une loi de Mal'cev sur X. On définit sur l'ensemble $X \times X$ des bipoints de l'ensemble X la relation R_p suivante, appelée *la relation de Chasles* associée à p :

$$(x,t)R_p(y,z) \quad \Leftrightarrow \quad t = p(x,y,z)$$

On laissera au lecteur la preuve du premier résultat qui est élémentaire :

Proposition 1.2.0.13. *1) La relation R_p est réflexive et, pour tout $x, y \in X$, on a toujours $(x,x)R_p(y,y)$.*
Si de plus on suppose que la loi p est associative à droite :
2) R_p est symétrique et transitive, et donc une relation d'équivalence
3) la diagonale $\Delta_X = \{(x,x)/x \in X\} \subset X \times X$ est une classe d'équivalence de la relation d'équivalence R_p
4) toute classe d'équivalence de R_p possède un unique représentant d'origine donnée x_0.

Soit p une loi de Mal'cev associative à droite. On note $\overrightarrow{X}$ l'ensemble quotient $(X \times X)/R_p$ (voir Section 7.1.3 de l'Appendice) et $\overrightarrow{xt}$ la classe d'équivalence du bipoint (x,t). Les points 3) et 4) ci-dessus déterminent les points suivants : *3')* $\overrightarrow{xx} = \overrightarrow{yy}$ et *4')* $\overrightarrow{x_0a} = \overrightarrow{x_0b} \;\Leftrightarrow\; a = b$

On notera $\rho_X : X \times X \twoheadrightarrow \overrightarrow{X}$ la surjection canonique qui associe à tout bipoint (x,t) la classe $\overrightarrow{xt}$. Par la Proposition 7.1.3.13, la relation nucléaire $R[\rho_X]$ (cf. Exemple 7.1.3.2) de cette surjection est la relation dont on est parti, à savoir la relation de Chasles R_p.

Exercice 1.2.0.14. Soit p une loi de Mal'cev associative à droite. Montrer que : $\overrightarrow{xp(x,y,z)} = \overrightarrow{x'p(x',y,z)}(= \overrightarrow{yz})$.

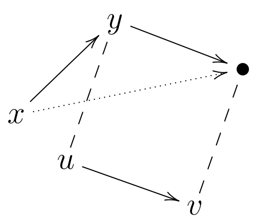
Exercice 1.2.0.15. Soit G un groupe et p sa loi de Mal'cev canonique. Montrer que $(x,y)R_p(x',y')$ si et seulement si $x^{-1}.y = x'^{-1}.y'$. Autrement dit la relation de Chasles R_p est la relation d'équivalence nucléaire $R[d]$ associée à la "division" $d : G \times G \to G$ définie par $d(x,y) = x^{-1} \cdot y$.

Exercice 1.2.0.16. Echange des termes moyens et extrêmes
Soit (X,p) un espace de Mal'cev. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1) (X, p) est commutatif
2) pour tout $(a, b, c, d) \in X^4$, on a : $(a, b)R_p(c, d) \quad \Leftrightarrow \quad (a, c)R_p(b, d)$
3) pour tout $(a, b, c, d) \in X^4$, on a : $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{cd} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{db} = \overrightarrow{ca}$
4) pour tout $(a, b, c, d) \in X^4$, on a : $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{cd} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{ac} = \overrightarrow{bd}$.

1.3 Direction d'un espace de Mal'cev

Dorénavant on supposera fixé un espace de Mal'cev (X, p). On va montrer que l'ensemble quotient $\overrightarrow{X}$ est muni d'une structure de groupe inspirée par la figure suivante :



Proposition 1.3.0.17. *Soit (X, p) un espace de Mal'cev. Alors l'ensemble quotient $\overrightarrow{X}$ est muni d'une loi de groupe définie par :*

$$\overrightarrow{xy} \cdot \overrightarrow{uv} = \overrightarrow{xp(y, u, v)}$$

Elle vérifie les identités de Chasles *: 1) $\overrightarrow{xy} \cdot \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz}$ et 2) $\overrightarrow{xx} = 1$.*

Preuve. Tout d'abord il faut montrer que la définition proposée ne dépend pas des représentants des classes d'équivalence. Supposons $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{x'y'}$ et $\overrightarrow{uv} = \overrightarrow{u'v'}$. On doit montrer $\overrightarrow{xp(y, u, v)} = \overrightarrow{x'p(y', u', v')}$, à savoir :

$$p(y, u, v) = p(x, x', p(y', u', v'))$$

Or : $p(x, x', p(y', u', v')) = p(p(x, x', y'), u', v') = p(y, u', v')$
puisque : $y = p(x, x', y')$ par $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{x'y'}$;
et : $p(y, u, v) = p(y, u, p(u, u', v')) = p(y, u', v')$
puisque : $v = p(u, u', v')$ par $\overrightarrow{uv} = \overrightarrow{u'v'}$.
Clairement la diagonale Δ_X est l'élément neutre de cette loi binaire sur $\overrightarrow{X}$ puisque : $\overrightarrow{xx} \cdot \overrightarrow{uv} = \overrightarrow{uu} \cdot \overrightarrow{uv} = \overrightarrow{up(u, u, v)} = \overrightarrow{uv}$ et $\overrightarrow{xy} \cdot \overrightarrow{uu} = \overrightarrow{xy} \cdot \overrightarrow{yy} = \overrightarrow{xp(y, y, y)} = \overrightarrow{xy}$.

De plus $\overrightarrow{yx}$ est l'inverse de $\overrightarrow{xy}$ puisque 1) : $\overrightarrow{xy} \cdot \overrightarrow{yx} = \overrightarrow{xp(y,y,x)} = \overrightarrow{xx}$ et par symétrie 2) : $\overrightarrow{yx} \cdot \overrightarrow{xy} = \overrightarrow{yp(x,x,y)} = \overrightarrow{yy}$.
Il reste donc à prouver l'associativité. On a :
$\overrightarrow{xy} \cdot (\overrightarrow{uv} \cdot \overrightarrow{st}) = \overrightarrow{xy} \cdot \overrightarrow{up(v,s,t)} = \overrightarrow{xp(y,u,p(v,s,t))} = \overrightarrow{xp(p(y,u,v),s,t)}$
et, de même : $(\overrightarrow{xy} \cdot \overrightarrow{uv}) \cdot \overrightarrow{st} = \overrightarrow{xp(y,u,v)} \cdot \overrightarrow{st} = \overrightarrow{xp(p(y,u,v),s,t)}$. □

Définition 1.3.0.18. *Soit (X,p) un espace de Mal'cev. On dit que le groupe $\overrightarrow{X}$ est la* direction *de l'espace de Mal'cev (X,p).*

Exercice 1.3.0.19. Montrer que le groupe $\overrightarrow{X}$ est abélien si et seulement si l'espace de Mal'cev (X,p) est commutatif. Dans ce cas, on note le groupe $(\overrightarrow{X},+,0)$ additivement.

Exercice 1.3.0.20. Quelques formules utiles. Montrer que :
1) $\overrightarrow{p(x,y,z)p(x,y,z')} = \overrightarrow{zz'}$
2) $\overrightarrow{p(x,y,z)p(x,y',z)} = \overrightarrow{zy} \cdot \overrightarrow{y'z} = \overrightarrow{zy} \cdot \overrightarrow{zy'}^{-1}$
3) $\overrightarrow{p(x,y,z)p(x',y,z)} = \overrightarrow{zy} \cdot \overrightarrow{xx'} \cdot \overrightarrow{zy}^{-1}$

Etant donné un groupe G, on peut caractériser les espaces de Mal'cev X qui ont, à isomorphisme près, le groupe G comme direction :

Proposition 1.3.0.21. *Soient (X,p) un espace de Mal'cev et G un groupe. Le groupe G est canoniquement isomorphe au groupe $\overrightarrow{X}$ si et seulement s'il existe une application $\phi : X \times X \to G$ telle que :*
1) ϕ est surjective
2) la relation nucléaire $R[\phi]$ est égale à la relation de Chasles R_p
3) $\phi(x,x) = 1$
4) $\phi(x,y) \cdot \phi(y,z) = \phi(x,z)$.

Preuve. Supposons les 4 conditions réunies. L'inclusion $R_p \subseteq R[\phi]$ et la propriété universelle du quotient (voir Théorème 7.1.3.16 et Corollaires) déterminent une *unique* factorisation θ dans le diagramme suivant qui est définie par $\theta(\overrightarrow{xy}) = \phi(x,y)$ et injective du fait de la stricte égalité $R_p = R[\phi]$:

$$\begin{tikzcd} X \times X \arrow[r, two heads, "\rho_X"] \arrow[dr, two heads, "\phi"'] & (X \times X)/R_p = \overrightarrow{X} \arrow[d, dotted, "\theta"] \\ & G \end{tikzcd}$$

Puisque ϕ est surjective, la factorisation θ est aussi surjective ; elle est donc bijective. La condition 3) entraine que θ préserve l'élément neutre de $\overrightarrow{X}$, tandis que la condition 4) entraine que θ préserve la loi de groupe. Ainsi θ est un homomorphisme de groupes bijectif et donc un isomorphisme. Réciproquement s'il existe un isomorphisme θ entre $\overrightarrow{X}$ et G, le composé $\theta \circ \rho_X$ vérifie les conditions de ϕ. □

C'est l'unicité de θ qui permet de parler d'isomorphisme *canonique*. Sous les hypothèses précédentes, on peut donc identifier $\overrightarrow{X}$ à G et $\overrightarrow{xy}$ à $\phi(x,y)$. Cette proposition va produire un premier exemple de direction :

Exercice 1.3.0.22. Soit G un groupe. Déterminer la direction associée à sa loi de Mal'cev canonique. Soit $h : G \to H$ un homomorphisme de groupes et $t_0 \in H$, $t_0 \neq 1$. Quelle est la direction de l'espace de Mal'cev $\Gamma_{t_0} = h^{-1}(\{t_0\})$? On pourra s'aider de l'Exercice 1.2.0.15.

1.4 Espace de Mal'cev et action de groupe

Les notions d'espace de Mal'cev et d'action de groupe strictement transitive (voir la Définition 7.2.4.5 de l'Appendice) sont étroitement liées. En quelque sorte elles sont respectivement les versants géométriques et algébriques d'une même structure.

Proposition 1.4.0.23. *Soit (X,p) un espace de Mal'cev. Alors la direction $\overrightarrow{X}$ agit sur l'ensemble X d'une manière strictement transitive par l'opération externe :*

$$\chi_X : \overrightarrow{X} \times X \to X \ ; \quad (\overrightarrow{xy}, z) \mapsto \overrightarrow{xy} * z = p(z,y,x)$$

Preuve. Il faut d'abord montrer que la définition de χ_X est indépendante du représentant de la classe $\overrightarrow{xy}$: on a déjà noté que $\overrightarrow{zp(z,y,x)} = \overrightarrow{yx}$. Par ailleurs 1) : $1 * x = \overrightarrow{xx} * x = p(x,x,x) = x$ et 2) : $\overrightarrow{xy} * (\overrightarrow{yz} * t) = \overrightarrow{xy} * p(t,z,y) = p(p(t,z,y),y,x) = p(t,z,x) = \overrightarrow{xz} * t = (\overrightarrow{xy} \cdot \overrightarrow{yz}) * t$.
L'égalité $\overrightarrow{yx} * x = p(x,x,y) = y$ montre que l'action est transitive. Par ailleurs, si on a : $\overrightarrow{vu} * x = y$, c'est-à-dire $p(x,u,v) = y$, on a $(x,y)R_p(u,v)$, à savoir $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{uv}$; et l'action est strictement transitive. □

Proposition 1.4.0.24. *Soit X un ensemble non vide et G un groupe. Il y a bijection entre les espaces de Mal'cev (X,p) de direction G et les actions strictement transitives de G sur X.*

Preuve. On vient de définir l'action strictement transitive de $\overrightarrow{X}$ sur X. Inversement, soit α une action strictement transitive de G sur X. On définit la loi de Mal'cev de la façon suivante : soit $(x, y, z) \in X \times X \times X$ et $g \in G$ l'unique élément tel que $g * y = z$. On pose $p(x, y, z) = g * x$. $\square$

1.5 Morphisme de Mal'cev

On va à présent se donner le moyen de comparer entre eux les espaces de Mal'cev. Soient (X, p) et (Y, π) deux espaces de Mal'cev.

Définition 1.5.0.25. *Une application $f : X \to Y$ est un morphisme de Mal'cev si f préserve la loi ternaire, autrement dit si :*

$$f(p(u, v, t)) = \pi(f(u), f(v), f(t))$$

Proposition 1.5.0.26. *Soit f un morphisme de Mal'cev. Il détermine un unique homorphisme de groupes $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{X} \to \overrightarrow{Y}$ tel que $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{uv}) = \overrightarrow{f(u)f(v)}$.*

Preuve. Soit $f \times f : X \times X \to Y \times Y$ l'application définie sur l'ensemble des bipoints de X par $(f \times f)(u, v) = (f(u), f(v))$. Considérons alors le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} X \times X \arrow[r, "f\times f"] \arrow[d, "\rho_X"'] & Y \times Y \arrow[d, "\rho_Y"] \\ \vec{X} \arrow[r, dotted, "\vec{f}"'] & \vec{Y} \end{tikzcd}$$

D'après la propriété universelle du quotient (Théorème 7.1.3.16), on aura une factorisation qui fait commuter le diagramme (c'est exactement le sens de l'égalité $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{uv}) = \overrightarrow{f(u)f(v)}$) si et seulement si :

$$R_p = R[\rho_X] \subset R[\rho_Y \circ (f \times f)] = (f \times f)^{-1}(R[\rho_Y]) = (f \times f)^{-1}(R[\pi])$$

Cette inclusion signifie : $(u, v)R_p(u', v') \Rightarrow (f(u), f(v))R_\pi(f(u'), f(v'))$, à savoir : $v = p(u, u', v') \Rightarrow f(v) = p(f(u), f(u'), f(v'))$, ce qui est la définition d'un morphisme de Mal'cev. Il reste à vérifier que $\overrightarrow{f}$ est bien un homorphisme de groupes.

1) On a : $\overrightarrow{f}(1) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{xx}) = \overrightarrow{f(x)f(x)} = 1$.
2) De plus on observe que :
$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{xy}.\overrightarrow{uv}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{xp(y,u,v)}) = \overrightarrow{f(x)f(p(y,u,v))}$
$= \overrightarrow{f(x)p(f(y),f(u),f(v))} = \overrightarrow{f(x)f(y)}.\overrightarrow{f(u)f(v)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{xy}).\overrightarrow{f}(\overrightarrow{uv})$. $\square$

Définition 1.5.0.27. *Soit $f : (X,p) \to (Y,\pi)$ un morphisme de Mal'cev. On dit que l'homomorphisme de groupes $\overrightarrow{f}$ est la* direction *de f.*

Exercice 1.5.0.28. Soient G et H deux groupes, et $h : G \to H$ un homomorphisme de groupes. Montrer que c'est un morphisme de Mal'cev pour les structures de Mal'cev canoniques associées. Quelle est la direction de ce morphisme de Mal'cev ?

Exercice 1.5.0.29. 1) Soit (X,p) un espace de Mal'cev. Montrer que l'application "identité" $Id_X : X \to X$, définie par $Id_X(x) = x$, est un morphisme de Mal'cev. Quelle est sa direction ?
2) Soient $(X,p) \xrightarrow{f} (Y,\pi) \xrightarrow{g} (Z,\psi)$ deux morphismes de Mal'cev. Montrer que le composé $g \circ f : (X,p) \to (Z,\psi)$ est un morphisme de Mal'cev et que $\overrightarrow{g \circ f} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$.
3) Soit $f : (X,p) \to (Y,\pi)$ un morphisme de Mal'cev. Montrer que f est injectif (resp. surjectif, bijectif) si et seulement si $\overrightarrow{f}$ est injectif (resp. surjectif, bijectif).
4) Soient (X,p) et (Y,π) deux espaces de Mal'cev et $y_0 \in Y$. Montrer que l'application constante $\check{y}_0 : X \to Y$ définie par $\check{y}_0(x) = y_0$ est un morphisme de Mal'cev. Quelle est sa direction ?

Nous avons avec le point 3) ci-dessus une excellente illustration de ce que nous entendons par la relation *géométrie/algèbre*.

"Postulat d'Euclide" pour les morphismes de Mal'cev

Le résultat suivant permet de générer extrêmement facilement des morphismes de Mal'cev à partir d'homomorphismes de groupes :

Théorème 1.5.0.30. *Soient X, Y deux espaces de Mal'cev et un homomorphisme de groupes $h : \overrightarrow{X} \to \overrightarrow{Y}$. Pour toute paire $(x_0, y_0) \in X \times Y$, il existe un et un seul morphisme de Mal'cev $f : X \to Y$ tel qu'on a :*

$$f(x_0) = y_0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{f} = h$$