Chapitre 1

TRANSFORMATION DE FOURIER

Le traitement de signal est toute transformation destinée à rendre un signal plus exploitable. Un signal est défini par toutes grandeurs physiques susceptibles de variations.

Classification des signaux

La classification des signaux se base essentiellement selon leurs variations en fonction du paramètre temps.

On peut effectuer un premier classement selon qu'ils soient des signaux continus dans le temps ou des signaux discrets ou échantillonnés. On opère aussi une deuxième classification selon la valeur de l'amplitude du signal qui elle aussi peut être continue (sa valeur réelle à l'instant t) ou quantifiée (sa valeur ramenée à une valeur prédéterminée).

Ces deux catégorisations de signaux permettent donc de dégager 4 formes principales de signaux largement employés en transmission :

1) Un signal dit analogique, c'est-à-dire que son amplitude est continue dans le temps (elle a une valeur à tout instant t).

2) Un signal échantillonné, c'est-à-dire que son amplitude est considérée à sa valeur réelle mais prise à des moments discrets selon une période d'échantillonnage Te. On obtient ce signal en sortie d'un échantillonneur.

3) Un signal quantifié, c'est-à-dire que son amplitude est ramenée à une valeur prédéterminée la plus proche de sa valeur réelle à l'instant d'échantillonnage Te.

4) Un signal dit numérique, c'est-à-dire que son amplitude est discrète et délivrée à des instants discrets Te. C'est le nombre binaire obtenu à la sortie d'un convertisseur analogique numérique.

On représente sur la figure suivante (figure 1) ces quatre différents signaux :

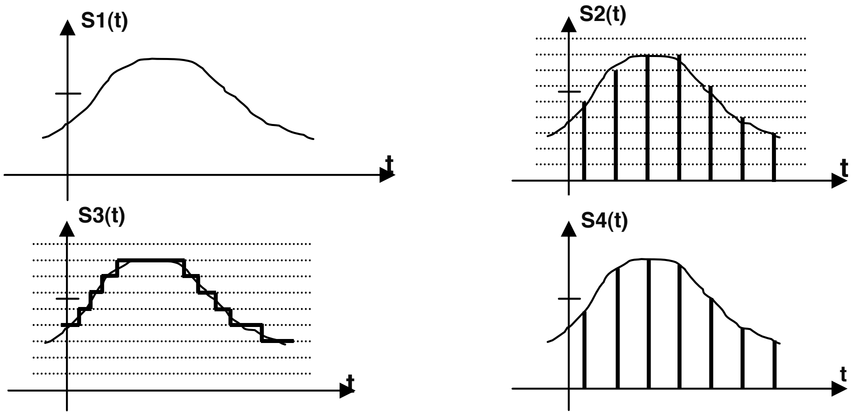


Figure 1 Différents signaux

1. TRANSFORMÉE DE FOURIER

1.1 Fonctions périodiques

Une fonction x(t) périodique de fréquence f et de période $T = \frac{1}{f}$ peut être décomposée en la somme d'un terme constant et de fonctions sinusoïdales dont les fréquences sont des multiples entiers de f :

$$\boxed{x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n.\cos(2\pi nft) + b_n.\sin(2\pi nft)\right]}$$

Les coefficients a_n et b_n sont donnés par :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t).\cos(2\pi nft)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t).\sin(2\pi nft)$$

Si l'on pose : $X(nf) = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$ on obtient

$$X(nf) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t).\exp(-j2\pi nft)dt$$

X(nf) est le spectre de fréquence qui peut se décomposer en :

- Un spectre d'amplitudes : $|X(nf)| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$
- Un spectre de phase : $\varphi(nf) = Arctg\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)$

La transformée de Fourier d'un signal périodique x(t) est donc :

$$\boxed{X(f) = TF[x(t)] = \sum_{-\infty}^{+\infty} |X(nf)|.\exp(-j\varphi(nf))}$$

1.2 Fonction non périodique

Soit x(t) une fonction non périodique. La transformée de Fourier T.F. de cette fonction est donnée par la relation suivante :

$$\boxed{X(f) = TF[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).\exp(-j2\pi ft)dt}$$

Cette fonction traduit la correspondance entre l'espace « temps » et l'espace « fréquence » souvent représentée par : $x(t) \leftrightarrow X(f)$. Elle peut être représentée par : $X(f) = \Re[X(f)] + \Im[X(f)]$ avec

$$\Re[X(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).\cos(2\pi ft)dt \quad \text{et} \quad \Im[X(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).\sin(2\pi ft)dt$$

X(f) est appelé spectre du signal.

$|X(f)|$ est appelé le spectre d'amplitude du signal : $|X(f)| = \sqrt{\Re e[X(f)]^2 + \Im m[X(f)]^2}$

Arg (X(f)) est appelé le spectre de phase du signal : $\phi[X(f)] = arctg\,\frac{\Im m[X(f)]}{\Re e[X(f)]}$

Pour une fréquence donnée f (ou pour une pulsation ω), X(f) représente la « quantité de sinusoïde de fréquence f » contenue dans le signal. En effet, on réalise par ce calcul le produit scalaire entre le signal x(t) et la sinusoïde sin(ωt). Plus le signal contient du « sin(ωt) », plus le terme X(f) est élevé.

On réalise ce calcul pour toutes les fréquences, on obtient ainsi la contribution de chaque sinusoïde dans le signal.

La transformée de Fourier inverse $T.F^{-1}$ d'une fonction X(f) est donnée par la relation :

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f).\exp(+j2\pi ft)df}$$

1.3 Exemple de calcul de transformée de Fourier

Signal rectangle

Le signal rectτ(t) est défini par un rectangle de largeur τ et d'amplitude A :

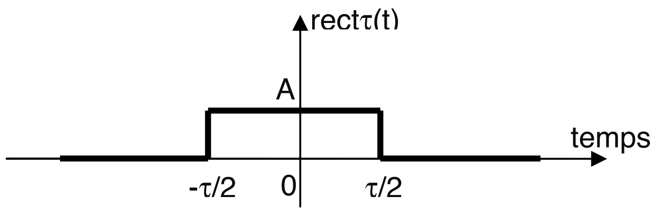


Figure 2 Spectre d'un signal rectangle

Soit : $x(t) = rect_\tau(t) = \begin{cases} A & si \quad \in \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right] \\ 0 & ailleurs \end{cases}$

La transformée de Fourier de ce signal sera :

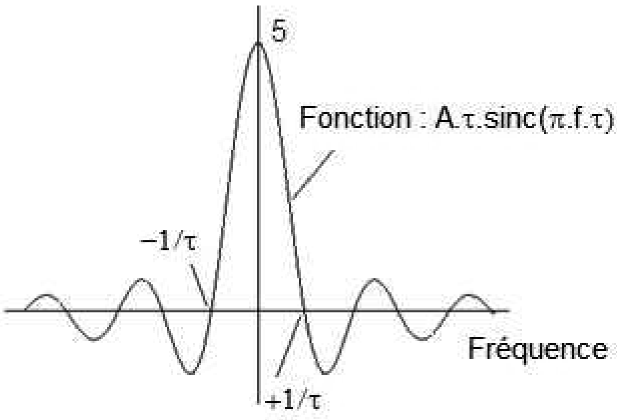
$$X(f) = TF[x(t)] = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} x(t).\exp(-j2\pi ft)dt$$

$$X(f) = A.\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \exp(-j2\pi ft)dt$$

$$X(f) = \frac{A}{j2\pi f}\left[\exp(j\pi f\tau) - \exp(-j\pi f\tau)\right]$$

$$\boxed{X(f) = A.\tau.\frac{\sin(\pi.f.\tau)}{\pi.f.\tau} = A.\tau.\sin c(\pi.f.\tau)}$$

Avec, par exemple, A = 5 et τ = 1, on obtient la courbe suivante :



On remarque que :

- La courbe s'annule pour des fréquences f = 1/τ, 2/τ, 3/τ, -1/τ, -2/τ, …
- La valeur, en f = 0, est égale à l'amplitude A du signal rectangle.

L'essentiel de l'énergie est contenue entre -1/τ et 1/τ. On rappelle que l'énergie est égale à l'intégrale de la courbe élevée au carré.

2. PROPRIÉTÉS DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER

Linéarité

La transformée de Fourier est une fonction linéaire :

$TF[\alpha.x(t) + \beta.x(t)] = \alpha.X(f) + \beta.Y(f)$

Parité

- Si x est une fonction réelle et paire $x(-t) = x(t)$; alors :

$$X(f) = TF[x(t)] = 2.\int_0^{+\infty} x(t).\cos(2\pi ft)dt$$

X(f) est réelle et paire.

- Si x est une fonction réelle et impaire $x(-t) = -x(t)$ alors :

$$X(f) = TF[x(t)] = -2j.\int_0^{+\infty} x(t).\sin(2\pi ft)dt$$

X(f) est imaginaire pure et impaire.

Similitude

Si pour x(t) on a la transformée de Fourier X(f), alors pour x(αt) on a la transformée : $\frac{1}{|\alpha|}X\left(\frac{f}{\alpha}\right)$

Dérivation

Soit x' la dérivée de x par rapport à t. Alors la transformée de Fourier de x' est :

$$TF\left[\frac{dx}{dt}\right] = j2\pi f.X(f) \quad \text{et donc} \quad T.F.\left[\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right] = (j2\pi f)^n.X(f)$$

Faire la dérivée dans l'espace des temps revient à multiplier X(f) par j2πf dans l'espace des fréquences.

Intégration

Si $X(0)=0$, alors il vient : $T.F.\left[\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{j2\pi f}X(f)$.

Faire une intégration dans l'espace des temps se traduit par diviser X(f) par j2πf dans l'espace des fréquences.

Convolution

Le résultat de l'opération de convolution de deux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$, noté $x_1(t) * x_2(t)$, est un nouveau signal x(t) défini par la relation :

$$x(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$$

Alors :
$$\boxed{TF[x_1(t) * x_2(t)] = X_1(f).X_2(f)}$$

La fonction x_1*x_2 est appelée convoluée de x_1 et x_2.
La convolution dans l'espace des temps devient une multiplication dans l'espace fréquentiel. La transformée de Fourier d'un produit de convolution est égale au produit des transformées de Fourier (théorème de Plancherel).

Multiplication

$$\boxed{TF[x_1(t).x_2(t)] = \frac{1}{2\pi}X_1(f) * X_2(f)}$$

Cette multiplication est aussi appelée théorème de la convolution fréquentielle. La multiplication dans le domaine temporel devient une convolution dans l'espace fréquentiel.

Retard

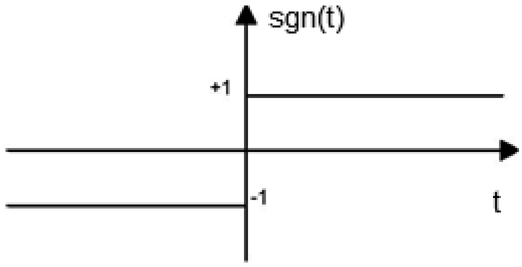
$$\boxed{TF[x(t-\tau] = X(f).\exp(-jf\tau)}$$

Apporter un retard τ à un signal dans le temps revient à multiplier sa transformée de Fourier par $\exp(-jf\tau)$. Puisque le module de $\exp(-jf\tau)$ est égal à 1, alors on peut conclure que retarder un signal ne modifie pas son spectre d'amplitude mais modifie seulement son spectre de phase.

3. TRANSFORMÉE DE FOURIER DE SIGNAUX ÉLÉMENTAIRES

Fonction signe

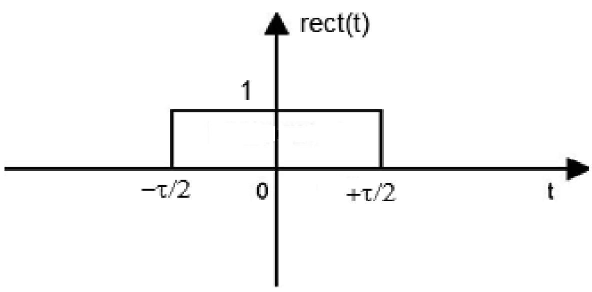
$$\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 0 & t = 0 \\ +1 & t > 0 \end{cases}$$



$$\boxed{T.F.[\mathrm{sgn}(t)](f) = \frac{1}{j.\pi.f}}$$

Fonction rectangulaire

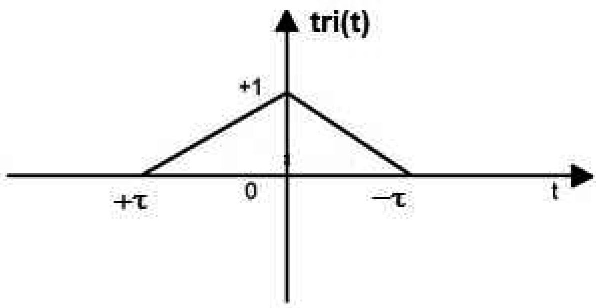
$$rect_\tau(t) = \begin{cases} 1 & t \in \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right] \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$



$$\boxed{T.F.[rect_\tau(t)](f) = \tau.\sin c(\pi.\tau.f)}$$

Fonction triangulaire

$$tri_{\tau}(t) = \wedge_{\tau}(t) = \begin{cases} 0 & t < -\tau \\ t+\tau & -\tau \le t \le 0 \\ -t+\tau & 0 \le t \le \tau \end{cases}$$

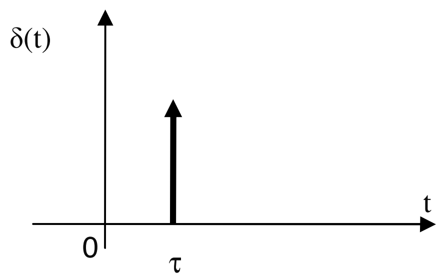


$$\boxed{T.F.[tri_{\tau}(t)](f) = \tau^2.\sin c^2(\pi.\tau.f)}$$

Fonction de Dirac

La fonction de Dirac δ(t) se définie comme suit :

$\delta(t) = \lim\limits_{\tau \longrightarrow +\infty} \tau.\sin c(\pi.\tau.t)$, δ(t) est aussi définie comme la dérivée (au sens des distributions) de la fonction échelon.



- À t = 0, l'amplitude de δ(t) est infinie, la largeur (ou durée) est nulle ;
- δ(t-τ) est une impulsion de Dirac décalée de τ ;
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t).dt = 1$, l'amplitude est infinie mais la valeur transportée par l'impulsion est 1 ;