

# Table des matières

Présentation de la collection . . . . .	3
Quelques conseils pour bien apprendre . . . . .	5
<b>SAVOIRS . . . . .</b>	<b>9</b>
Thème 1 - Compléments d'algèbre linéaire . . . . .	10
Thème 2 - Déterminant . . . . .	18
Thème 3 - Réduction . . . . .	21
Thème 4 - Espaces préhilbertiens réels et euclidiens . . . . .	26
Thème 5 - Intégrales généralisées . . . . .	37
Thème 6 - Séries numériques . . . . .	44
Thème 7 - Séries entières . . . . .	48
Thème 8 - Équations différentielles et systèmes différentiels . . . . .	54
Thème 9 - Fonctions vectorielles . . . . .	63
Thème 10 - Courbes du plan . . . . .	69
Thème 11 - Fonctions de plusieurs variables . . . . .	77
Thème 12 - Courbes de l'espace et surfaces . . . . .	86
Thème 13 - Intégrale dépendant d'un paramètre . . . . .	94
Thème 14 - Probabilités discrètes . . . . .	97
Thème 15 - Variables aléatoires discrètes . . . . .	100
<b>SAVOIR-FAIRE . . . . .</b>	<b>107</b>
Thème 0 - Savoir-faire de base . . . . .	<b>108</b>
Quels sont les principaux types de raisonnement? . . . . .	108
Raisonnement par implication . . . . .	108
Raisonnement par équivalence . . . . .	109
Raisonnement par disjonction des cas . . . . .	109
Faire un raisonnement par récurrence . . . . .	109
Raisonnement par analyse et synthèse . . . . .	110
Quels sont les savoir-faire de base en algèbre? . . . . .	112
Montrer une inclusion . . . . .	112
Montrer une égalité de deux ensembles . . . . .	112
Montrer qu'une application est bijective . . . . .	113
Connaître la formule du binôme . . . . .	114
Traduire une matrice ou une application linéaire . . . . .	114
Calculer un produit matriciel . . . . .	115
Faire un changement de base . . . . .	115

Quels sont les savoir-faire de base en analyse ? . . . . .	116
Savoir majorer ou minorer . . . . .	116
Connaître les sommes classiques . . . . .	117
Connaître la formule de Taylor avec reste intégral . . . . .	118
Connaître les développements limités usuels . . . . .	119
Savoir retrouver les formules de base en trigonométrie . . . . .	120
Connaître les grands théorèmes sur les suites . . . . .	121
Utiliser un développement limité . . . . .	122
Utiliser les comparaisons . . . . .	122
Connaître le théorème fondamental d'une intégrale . . . . .	124
Reconnaître une dérivée dans un calcul de primitive . . . . .	124
Utiliser une intégration par parties (IPP) . . . . .	125
Faire un changement de variables . . . . .	126
Utiliser une somme de Riemann . . . . .	127
Savoir majorer ou minorer une intégrale . . . . .	127
Quels sont les savoir-faire de base en géométrie ? . . . . .	128
Reconnaître si des vecteurs sont liés . . . . .	128
Écrire une équation d'une droite ou d'un cercle dans le plan . . . . .	129
Écrire un SEC ou une RP d'une droite dans l'espace . . . . .	129
Écrire une EC ou une RP d'un plan dans l'espace . . . . .	130
Savoir calculer la distance d'un point à une droite ou à un plan dans l'espace . . . . .	131
À vous de jouer ! . . . . .	132
<b>Thème 1 - Compléments d'algèbre linéaire . . . . .</b>	<b>134</b>
Comment démontrer que $F$ est un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel ? . . . . .	134
Prouver que $F$ est un sev . . . . .	134
Prouver que $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ . . . . .	134
Utiliser le noyau et l'image d'une certaine application linéaire . . . . .	135
Comment démontrer l'égalité de deux sous-espaces vectoriels ? . . . . .	135
Utiliser la double inclusion . . . . .	135
Utiliser les dimensions . . . . .	135
Comment démontrer qu'une famille $(v_1, \dots, v_p)$ est une base de $E$ ? . . . . .	136
Revenir à la définition . . . . .	136
Utiliser une des propriétés fondamentales de 1 <sup>re</sup> année . . . . .	136
Comment calculer la dimension d'un sous-espace vectoriel ? . . . . .	137
Revenir à la définition . . . . .	137
Appliquer le théorème du rang . . . . .	137
Appliquer la formule de Grassmann . . . . .	138
Comment calculer le rang d'une famille $(v_1, \dots, v_p)$ ? . . . . .	139
Revenir à la définition . . . . .	139
Calculer le rang d'une matrice par la méthode du pivot de Gauss . . . . .	139
Comment démontrer qu'un espace vectoriel est une somme directe de sev ? . . . . .	141
Revenir à la définition . . . . .	141
Utiliser la caractérisation d'une somme directe de deux sev . . . . .	142
Utiliser des bases adaptées . . . . .	144
Comment caractériser une application ? . . . . .	144
Démontrer que $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . . . . .	144
Démontrer que c'est un isomorphisme . . . . .	145
Traduire à l'aide d'une matrice simple . . . . .	146
Comment caractériser un endomorphisme remarquable ? . . . . .	147
Montrer que c'est une homothétie vectorielle . . . . .	147
Montrer que c'est un projecteur . . . . .	147
Montrer que c'est une symétrie . . . . .	148
À vous de jouer ! . . . . .	149
<b>Thème 2 - Déterminant . . . . .</b>	<b>153</b>
Comment calculer un déterminant ? . . . . .	153
Utiliser une bonne combinaison linéaire . . . . .	153
Faire apparaître un terme identique sur une colonne . . . . .	154
Aboutir à une relation de récurrence . . . . .	155
Transformer en une matrice triangulaire par blocs . . . . .	157
Quand utiliser le déterminant ? . . . . .	158
Savoir si une famille de vecteurs est une base . . . . .	158

Savoir si un endomorphisme est bijectif . . . . .	158
Déterminer une équation d'une droite ou d'un plan . . . . .	159
À vous de jouer ! . . . . .	160
<b>Thème 3 - Réduction . . . . .</b>	<b>163</b>
Comment déterminer les éléments propres ? . . . . .	163
Revenir aux définitions . . . . .	163
Savoir calculer le polynôme caractéristique en petite dimension . . . . .	165
Comparer la multiplicité d'une valeur propre et la dimension du sep associé . . . . .	166
Savoir trouver la dernière valeur propre . . . . .	166
Savoir trouver les deux dernières valeurs propres . . . . .	167
Utiliser les sous-espaces stables . . . . .	169
Comment diagonaliser une matrice ? . . . . .	170
Repérer si le polynôme caractéristique est scindé à racines simples . . . . .	170
Savoir si une matrice ayant une valeur propre unique est diagonalisable . . . . .	172
Utiliser le théorème spectral . . . . .	173
Comment trigonaliser une matrice ? . . . . .	174
Trigonaliser une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$ . . . . .	174
Trigonaliser une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbf{K})$ possédant 2 valeurs propres différentes . . . . .	176
Trigonaliser une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbf{K})$ possédant une valeur propre triple . . . . .	178
Quand utiliser la diagonalisation ? . . . . .	182
Calculer les puissances d'une matrice diagonalisable . . . . .	182
Déterminer le terme général d'une suite récurrente linéaire . . . . .	183
Étudier des suites simultanément récurrentes . . . . .	185
À vous de jouer ! . . . . .	186
<b>Thème 4 - Espaces vectoriels préhilbertiens réels et euclidiens . . . . .</b>	<b>189</b>
Comment montrer que $\varphi$ est un produit scalaire ? . . . . .	189
Revenir à la définition . . . . .	189
Quand utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz ? . . . . .	189
Identifier les éléments d'une inégalité . . . . .	190
Comment déterminer l'orthogonal d'un sev de dimension finie ? . . . . .	190
Utiliser une base du sev . . . . .	190
Comment construire une base orthonormée (b.o.n) ? . . . . .	191
Suivre la procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt . . . . .	191
Comment déterminer le projeté orthogonal ? . . . . .	193
Utiliser la formule de la projection orthogonale . . . . .	193
Déterminer la projection orthogonale sur $F^\perp$ . . . . .	194
Résoudre un système linéaire . . . . .	194
Comment résoudre un problème de minimisation ? . . . . .	195
Utiliser une projection orthogonale . . . . .	195
Comment montrer qu'un endomorphisme est une isométrie ? . . . . .	196
Mettre en avant une caractérisation d'une isométrie . . . . .	196
Comment caractériser une isométrie dans $\mathbf{R}^2$ ? . . . . .	197
Calculer son déterminant . . . . .	197
Comment caractériser une isométrie dans $\mathbf{R}^3$ ? . . . . .	198
Évaluer la dimension du sev des invariants de l'isométrie . . . . .	198
Utiliser le produit vectoriel . . . . .	200
Comment déterminer la matrice d'une isométrie dans $\mathbf{R}^3$ ? . . . . .	201
Passer par une base adaptée . . . . .	201
Retrouver son expression vectorielle . . . . .	203
Comment étudier une conique ? . . . . .	204
Réduire son équation dans un repère orthonormé . . . . .	204
À vous de jouer ! . . . . .	208
<b>Thème 5 - Intégrales généralisées . . . . .</b>	<b>211</b>
Comment déterminer la nature d'une intégrale d'une fonction positive ? . . . . .	211
Identifier les problèmes . . . . .	211
Repérer une fausse intégrale généralisée . . . . .	211
Utiliser les théorèmes de comparaison . . . . .	212

Comment étudier l'intégrabilité d'une fonction continue ?	213
Appliquer les méthodes relatives aux fonctions positives	213
Comparer la fonction $f$	214
Appliquer la règle $t^\alpha f(t)$	214
Étudier les fonctions $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ dans le cas complexe	216
Comment étudier la nature de $\int_I f$ où $f \in \mathcal{C}(I, \mathbf{K})$ ?	217
Utiliser l'intégrabilité	218
Appliquer un changement de variable ou une IPP	218
Comment calculer une intégrale généralisée convergente ?	220
Utiliser une primitive	220
Intégrer par parties sur un segment	221
Utiliser un changement de variable	222
À vous de jouer !	223
<b>Thème 6 - Séries numériques</b>	<b>225</b>
Comment déterminer la nature d'une série à termes positifs ?	225
Utiliser les propriétés fondamentales de 1 <sup>re</sup> année	225
Utiliser le théorème de comparaison série-intégrale	241
Comment prouver la convergence absolue d'une série ?	227
Utiliser les théorèmes de comparaison	227
Appliquer la règle $n^\alpha u_n$	228
Appliquer la règle de d'Alembert	230
Étudier $\sum \operatorname{Im}(u_n)$ et $\sum \operatorname{Re}(u_n)$ d'une série à termes complexes	231
Utiliser le produit de Cauchy	232
Revenir à la définition	233
Comment étudier les suites $(S_N)_N$ et $(R_N)_N$ ?	233
Appliquer le théorème de comparaison série-intégrale	233
À vous de jouer !	235
<b>Thème 7 - Séries entières</b>	<b>238</b>
Comment calculer le rayon de convergence ?	238
Utiliser la caractérisation du rayon de convergence	238
Utiliser la règle de d'Alembert	238
Chercher un équivalent simple	239
Comparer les rayons de convergence	239
Revenir à la définition	240
Comment déterminer un développement en série entière ?	241
Utiliser les DSE de fonctions usuelles	241
Utiliser une équation différentielle	243
Utiliser la série de Taylor	246
Comment calculer la somme d'une série entière ?	246
Manipuler les DSE de fonctions usuelles	246
Trouver et résoudre une équation différentielle	249
Comment résoudre une équation du type $e^z = a$ ?	250
Revenir aux propriétés fondamentales	250
À vous de jouer !	251
<b>Thème 8 - Équations différentielles et systèmes différentiels</b>	<b>255</b>
Comment résoudre une équation différentielle scalaire d'ordre 1 ?	255
Suivre un plan d'étude en trois étapes	255
Comment résoudre un système différentiel ?	256
Diagonaliser ou trigonaliser la matrice associée	256
Comment résoudre une équation différentielle scalaire d'ordre 2 ?	260
Appliquer la méthode de la variation de la constante	260
Déterminer une solution développable en série entière	262
Faire un changement de variables	264
Utiliser la superposition des solutions	266
À vous de jouer !	267
<b>Thème 9 - Fonctions vectorielles</b>	<b>270</b>
Comment montrer qu'un ensemble est un ouvert ou un fermé de $\mathbf{R}^n$ ?	270
Revenir à la définition	270

Utiliser les propriétés de topologie . . . . .	270
Comment étudier une fonction vectorielle? . . . . .	271
Utiliser les fonctions coordonnées . . . . .	271
Revenir aux propriétés fondamentales . . . . .	272
À vous de jouer! . . . . .	272
<b>Thème 10 - Courbes du plan . . . . .</b>	<b>275</b>
Comment réduire le domaine d'étude? . . . . .	275
Repérer une invariance . . . . .	275
Chercher d'éventuelles symétries . . . . .	276
Comment étudier un point stationnaire? . . . . .	278
Utiliser un développement limité . . . . .	278
Utiliser une symétrie . . . . .	279
Comment étudier les branches infinies? . . . . .	281
Comparer les croissances des coordonnées . . . . .	281
Comment déterminer les points doubles? . . . . .	283
Résoudre un système . . . . .	283
Comment étudier une courbe paramétrée et représenter son support? . . . . .	284
Suivre un plan d'étude en six étapes . . . . .	284
Comment déterminer l'enveloppe d'une famille de droites? . . . . .	288
Utiliser la méthode vectorielle . . . . .	288
Comment déterminer le repère de Frénet en un point? . . . . .	290
Revenir à la définition . . . . .	290
Comment déterminer la courbure et le rayon de courbure? . . . . .	290
Revenir à la définition . . . . .	290
Utiliser les formules de Frénet . . . . .	292
Comment déterminer la développée d'une courbe? . . . . .	292
Chercher le lieu des centres de courbure . . . . .	292
Chercher l'enveloppe des normales . . . . .	293
À vous de jouer! . . . . .	295
<b>Thème 11 - Fonctions de plusieurs variables . . . . .</b>	<b>298</b>
Comment étudier la continuité d'une fonction? . . . . .	298
Utiliser les théorèmes généraux . . . . .	298
Majorer convenablement . . . . .	298
Paramétrer avec les coordonnées polaires . . . . .	299
Comment montrer qu'une fonction est de classe $C^1$ ou $C^2$ ? . . . . .	300
Utiliser les théorèmes généraux . . . . .	300
Utiliser les dérivées partielles . . . . .	300
Comment résoudre une équation aux dérivées partielles (EDP)? . . . . .	303
Faire un changement de variable . . . . .	303
Comment déterminer les extrema? . . . . .	304
Étudier la matrice hessienne . . . . .	304
Mettre en avant une combinaison linéaire de carrés . . . . .	306
Chercher les extrema sur un ensemble fermé borné . . . . .	308
À vous de jouer! . . . . .	311
<b>Thème 12 - Courbes de l'espace et surfaces . . . . .</b>	<b>314</b>
Comment montrer qu'une courbe est plane? . . . . .	314
Vérifier une équation d'un plan . . . . .	314
Comment déterminer les projections d'une courbe sur les plans des coordonnées? . . . . .	315
Éliminer un paramètre entre les équations . . . . .	315
Comment déterminer les sections planes d'une surface? . . . . .	318
Projeter la section sur un plan des coordonnées . . . . .	318
Comment déterminer les points stationnaires d'une surface? . . . . .	319
Utiliser les dérivées partielles . . . . .	319
Comment déterminer une équation d'un plan tangent à une surface? . . . . .	320
Caractériser un plan tangent par un vecteur orthogonal . . . . .	320
Comment déterminer une tangente à une courbe? . . . . .	322
Paramétrer la courbe . . . . .	322

Utiliser le gradient dans le cas des courbes de niveau . . . . .	322
Voir la courbe comme intersection de deux surfaces . . . . .	324
Comment démontrer qu'une surface est réglée ? . . . . .	325
Décomposer la surface en une réunion de droites . . . . .	325
Comment déterminer si une surface est développable ? . . . . .	326
Étudier les vecteurs normaux le long d'une génératrice . . . . .	326
Comment déterminer une équation d'une surface de révolution ? . . . . .	328
Éliminer des coordonnées entre les équations . . . . .	328
Comment déterminer une RP d'une surface de révolution ? . . . . .	330
Utiliser une matrice de rotation . . . . .	330
Comment déterminer une méridienne ? . . . . .	331
Choisir un bon repère . . . . .	331
À vous de jouer ! . . . . .	332
<b>Thème 13 - Intégrale dépendant d'un paramètre . . . . .</b>	<b>338</b>
Comment déterminer le domaine de définition ? . . . . .	338
Étudier la convergence de l'intégrale . . . . .	338
Comment prouver la continuité ? . . . . .	340
Utiliser le théorème de la continuité dans le cas d'un intervalle . . . . .	340
Utiliser le théorème de la continuité dans le cas d'un segment . . . . .	341
Comment prouver la dérivabilité ? . . . . .	342
Utiliser le théorème de la dérivabilité dans le cas d'un intervalle . . . . .	342
Utiliser le théorème de la dérivabilité dans le cas d'un segment . . . . .	344
Comment calculer une intégrale dépendant d'un paramètre ? . . . . .	345
Utiliser la dérivée . . . . .	345
Utiliser une équation différentielle . . . . .	346
À vous de jouer ! . . . . .	348
<b>Thème 14 - Probabilités discrètes . . . . .</b>	<b>351</b>
Comment montrer qu'un ensemble est dénombrable ? . . . . .	351
Revenir aux propriétés fondamentales . . . . .	351
Comment calculer la probabilité d'une intersection d'événements ? . . . . .	351
Étudier l'indépendance ou l'inclusion entre les événements . . . . .	351
Comment calculer la probabilité d'une réunion d'événements ? . . . . .	353
Étudier l'incompatibilité ou l'inclusion entre les événements . . . . .	353
Comment utiliser la formule de Bayes ? . . . . .	354
Calculer une probabilité totale . . . . .	354
Calculer une probabilité conditionnelle . . . . .	355
Comment calculer une probabilité ? . . . . .	356
Utiliser des opérations élémentaires sur les événements . . . . .	356
Construire un système complet d'événements . . . . .	357
À vous de jouer ! . . . . .	358
<b>Thème 15 - Variables aléatoires discrètes . . . . .</b>	<b>362</b>
Comment démontrer qu'une loi est de probabilité ? . . . . .	362
Vérifier deux critères . . . . .	362
Comment reconnaître les lois usuelles ? . . . . .	363
Modéliser l'expérience . . . . .	363
Utiliser la série génératrice . . . . .	365
Comment déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire ? . . . . .	366
Utiliser le dénombrement ou les lois usuelles . . . . .	366
Utiliser la fonction de répartition . . . . .	366
Utiliser la série génératrice . . . . .	368
Comment calculer l'espérance ou la variance ? . . . . .	368
Revenir aux définitions . . . . .	368
Utiliser la série génératrice . . . . .	369
Utiliser le théorème du transfert . . . . .	370
Comment étudier la loi conjointe de $(X, Y)$ ? . . . . .	371
Interpréter les événements élémentaires . . . . .	371
Utiliser les probabilités conditionnelles . . . . .	372

Comment déterminer les lois marginales? . . . . .	373
Calculer une somme . . . . .	373
Comment étudier l'indépendance de deux variables aléatoires? . . . . .	374
Vérifier si la covariance est non nulle . . . . .	374
Revenir à la définition . . . . .	376
Comment encadrer une probabilité? . . . . .	377
Utiliser les inégalités classiques . . . . .	377
À vous de jouer! . . . . .	378
<b>CORRIGÉS DES EXERCICES . . . . .</b>	<b>383</b>