Chapitre 1

Suites de nombres réels

Rappelons que $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs et $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels. Nous supposons que le lecteur s'est familiarisé durant ses études secondaires avec l'ensemble des nombres réels noté $\mathbb{R}$, les propriétés de son addition, de sa multiplication et de sa relation d'ordre.
Le lecteur s'est aussi familiarisé avec la valeur absolue. Il est important de noter que c'est un outil essentiel de l'analyse aidant à majorer, minorer et approcher. Comme le lecteur le remarquera plus tard, la valeur absolue sera l'outil de base dans la définition des notions de limite, continuité, dérivabilité, etc.
On rappelle que la valeur absolue d'un nombre réel x est le réel noté $|x|$ et défini par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x, \\ -x & \text{si} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

La proposition suivante résume les propriétés de la valeur absolue.

Proposition 1 *Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Les propriétés suivantes sont vérifiées.*

(**N1**) $|x| \geq 0$.
(**N2**) $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
(**N3**) $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(inégalité triangulaire).*
(**N4**) $|xy| = |x||y|$.

Remarques -

1. On a, pour tout $a > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|x| \leq a \quad \Leftrightarrow \quad -a \leq x \leq a. \tag{1.1}$$

2. De l'inégalité triangulaire, on peut déduire les inégalités

$$||x| - |y|| \leq |x - y|. \tag{1.2}$$

$$||x| - |y|| \leq |x + y|. \tag{1.3}$$

La partie entière d'un nombre est un outil important en analyse. Son existence est une conséquence d'une propriété importante de $\mathbb{R}$ à savoir que $\mathbb{R}$ est un corps archimédien. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la **partie entière** de x, notée $E(x)$ ou $[x]$, est l'unique élément de $\mathbb{Z}$ vérifiant

$$E(x) \leq x < E(x) + 1. \tag{1.4}$$

Exemple - On a $E(\frac{1}{2}) = 0$, $E(-\frac{1}{2}) = -1$, $E(\pi) = 3$ et $E(e) = 2$.

1.1 Bornes supérieure et inférieure

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

1. On dit que $m \in \mathbb{R}$ est un **majorant** de A si pour tout $a \in A$, $a \leq m$.
2. On dit que $m \in \mathbb{R}$ est un **minorant** de A si pour tout $a \in A$, $a \geq m$.
3. Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite **majorée** (resp. **minorée**) si elle admet un majorant (resp. minorant).
4. Une partie qui est à la fois majorée et minorée est dite **bornée**.

Clairement, A est bornée si et seulement si il existe un réel M tel que

$$\forall a \in A, \quad |a| \leq M.$$

Définition 1 *On dit que $m \in \mathbb{R}$ est un plus grand élément (resp. plus petit élément) de A et on note $m = \max A$ (resp. $m = \min A$) si $m \in A$ et si m est un majorant de A (resp. un minorant de A).*

Exemples -

1. Si $A = \{n \in \mathbb{Z}, n^2 + 1 \leq 100\}$, alors l'ensemble des majorants de A est l'intervalle $[9, +\infty[$ et $9 = \max A$. L'ensemble des minorants de A est l'intervalle $]-\infty, -9]$ et $-9 = \min A$. Ainsi A est borné.
2. Si $A =]1, +\infty[$ alors A n'admet pas de majorant et l'ensemble des minorants de A est l'intervalle $]-\infty, 1]$. On remarque que bien que A admet une infinité de minorants, il n'a pas de plus petit élément. A est minoré mais n'est pas majoré.

Définition 2 *1. Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$ et soit M_A l'ensemble de ses majorants. On appelle borne supérieure de A qu'on notera* $\sup A$ *le plus petit élément de $\mathcal{M}_A$ quand il existe.*

2. Soit A une partie minorée de $\mathbb{R}$ et soit m_A l'ensemble de ses minorants. On appelle borne inférieure de A qu'on notera $\inf A$ *le plus grand élément de m_A quand il existe.*

Remarques -

1. Les bornes supérieure et inférieure quand elles existent sont uniques.
2. Si $\max A$ existe alors $\sup A = \max A$. De même si $\min A$ existe alors $\inf A = \min A$.

Exemple - On a

$$\sup]-\infty, 1] = \sup]-\infty, 1[= 1 \quad \text{et} \quad \inf]0, 1] = \inf[0, 1] = 0.$$

Les propositions suivantes donnent une caractérisation pratique de la borne supérieure et de la borne inférieure.

Proposition 2 *Soit $A \subset \mathbb{R}$. Alors $M = \sup A$ si et seulement si :*
(i) pour tout $a \in A$, $a \leq M$;
(ii) pour tout $\epsilon > 0$, il existe un élément a de A tel que $M - \epsilon < a$.

L'assertion (i) exprime le fait que M est un majorant, alors que (ii) est l'expression mathématique du fait que $\sup A$ est le plus petit des majorants de A. En effet, pour tout $\epsilon > 0$, $\sup A - \epsilon$ n'est plus un majorant de A ce qui donne (ii).

Proposition 3 *Soit $A \subset \mathbb{R}$. Alors $m = \inf A$ si et seulement si :*
(i) pour tout $a \in A$, $m \leq a$;
(ii) pour tout $\epsilon > 0$, il existe un élément a de A tel que $m + \epsilon > a$.

L'assertion (i) exprime le fait que m est un minorant, alors que (ii) est l'expression mathématique du fait que $\inf A$ est le plus grand des minorants de A. En effet, pour tout $\epsilon > 0$, $\inf A + \epsilon$ n'est plus un minorant de A ce qui donne (ii).

Exemple - Soit $A = \left\{\frac{2n-1}{1-3n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$. En utilisant la proposition 3, nous allons montrer que $\inf A = -\frac{2}{3}$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{2n-1}{1-3n} + \frac{2}{3} = \frac{6n-3+2-6n}{2(1-3n)} = \frac{1}{2(3n-1)} \geq 0,$$

ainsi

$$\frac{2n-1}{1-3n} \geq -\frac{2}{3}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et donc (i) de la proposition 3 est vérifié. Vérifions maintenant (ii). Soit $\epsilon > 0$. Il s'agit de trouver un $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$-\frac{2}{3} + \epsilon > \frac{2n_0 - 1}{1 - 3n_0}.$$

Cette inégalité est équivalente à

$$\frac{1}{2(3n_0 - 1)} < \epsilon,$$

soit $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\epsilon} + 1\right) < n_0$. Or l'entier $n_0 = E(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\epsilon} + 1\right)) + 1$ vérifie cette inégalité en vertu de la relation (1.4) et (ii) est vérifiée.

Le théorème suivant est parmi les théorèmes les plus importants de l'analyse.

Théorème 1 (Théorème de la borne supérieure)
Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Soit A une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$. La partie $(-A) = \{-a, a \in A\}$ est majorée et donc admet une borne supérieure d'après le Théorème 1. En plus, $\inf A = -\sup(-A)$. On déduit alors :

Corollaire 1 *Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.*

Dans le théorème de la borne supérieure, il y a deux hypothèses : A doit être non vide et majorée. Quelquefois, le plus difficile est de montrer que A est non vide.

Exemples - On considère l'ensemble

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}, 0 < x \leq 1 \text{ et } \left| \frac{1}{x^2+1} \cos\left(\frac{1}{e^x - 1}\right) \right| \leq \frac{1}{10} \right\}.$$

Nous allons utiliser le théorème 1 et son corollaire pour montrer que A admet une borne supérieure et une borne inférieure. Puisque, par définition, si $x \in A$, alors $0 < x \leq 1$, on déduit que A est minoré et majoré. Montrons maintenant que A est non vide. Prenons $x = \ln\left(1 + \frac{2}{\pi}\right) \simeq 0.49$. On a $0 < x \leq 1$ et

$$\left| \frac{1}{x^2+1} \cos\left(\frac{1}{e^x-1}\right) \right| = \left| \frac{1}{(\ln\left(1+\frac{2}{\pi}\right)^2 + 1)} \cos(\pi/2) \right| = 0 \leq \frac{1}{10}$$

et donc $\ln\left(1 + \frac{2}{\pi}\right) \in A$. Maintenant le théorème 1 et son corollaire assurent l'existence de $\inf A$ et $\sup A$. Le calcul explicite de $\sup A$ et $\inf A$ est difficile.

1.2 Suites de nombres réels

1.2.1 Définitions

Définition 3 *Une suite dans $\mathbb{R}$ est une application qui associe à tout entier $n \geq n_0$ un réel qu'on notera u_n. Une telle suite sera notée $(u_n)_{n \geq n_0}$ et u_{n_0} est appelé le premier terme de la suite.*

Les **suites arithmétiques** et les **suites géométriques** sont des exemples usuelles de suites réels. Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite arithmétique de raison $a \in \mathbb{R}$ si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n + a.$$

De cette relation, on déduit par récurrence que pour tout $n \geq 0$,

$$u_n = u_0 + na.$$

La somme des $n+1$ premiers termes d'une suite arithmétique est donnée par

$$\sum_{p=0}^{n} u_p = (n+1)u_0 + a\frac{n(n+1)}{2}. \tag{1.5}$$

En particulier,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1.6}$$

Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = qu_n.$$

De cette relation, on déduit par récurrence que, pour tout $n \geq 0$,

$$u_n = u_0 q^n. \tag{1.7}$$

On a la formule, pour $q \neq 1$,

$$\sum_{p=0}^{n} q^p = 1 + q + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}. \tag{1.8}$$

Une conséquence immédiate de cette formule est la formule usuelle suivante :

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + ba^{n-2} + \ldots + b^{n-2}a + b^{n-1}), \tag{1.9}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Nous allons maintenant présenter une liste de définitions relatives aux suites réelles.

- Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite majorée s'il existe un réel $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq M$.
- Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite minorée s'il existe un réel $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq m$.
- Une suite qui est à la fois majorée et minorée est dite bornée et ceci équivaut à l'existence de $M > 0$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $|u_n| \leq M$.
- Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite croissante si pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq u_{n+1}$.
- Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite strictement croissante si pour tout $n \geq n_0$, $u_n < u_{n+1}$.
- Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite décroissante si pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n+1}$.
- Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite strictement décroissante si pour tout $n \geq n_0$, $u_n > u_{n+1}$.

Une suite qui est soit croissante, soit décroissante, est dite monotone.

Exemples -

1. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = \frac{n^2}{n^2+1}$ est bornée. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n| \leq 1$.
2. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \ln(n)$ est minorée par 0 mais n'est pas majorée.
3. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = e^{-n}$ est minorée par 0 et elle est majorée par 1.
4. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \frac{1}{n}$ est strictement décroissante. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0.$$
5. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = e^{n^2}$ est strictement croissante. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 < (n+1)^2$ et puisque la fonction exponentielle est strictement croissante, on a $e^{n^2} < e^{(n+1)^2}$ et donc $u_n < u_{n+1}$.
6. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ n'est ni croissante ni décroissante. En effet, $u_1 < u_2$ et $u_2 > u_3$.

1.2.2 Convergence et divergence d'une suite

Définition 4 *On dit que $(u_n)_{n\geq n_0}$ est convergente s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \geq n_0 \text{ tel que } \forall n \geq N,\ \ell - \epsilon \leq u_n \leq \ell + \epsilon. \tag{1.10}$$

Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

La relation (1.10) est équivalente, d'après (1.1), à

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \geq n_0 \text{ tel que } \forall n \geq N\ \ |u_n - \ell| \leq \epsilon. \tag{1.11}$$

La convergence peut s'exprimer en disant qu'une suite converge vers ℓ si pour tout intervalle ouvert centré en ℓ (aussi petit soit-il) il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont dans cette intervalle. Comme deux réels distincts peuvent être mis dans deux intervalles disjoints, une suite ne peut pas converger vers deux réels différents.

Proposition 4 *Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge vers ℓ_1 et ℓ_2 alors $\ell_1 = \ell_2$.*

Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge vers ℓ, on notera

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \ell.$$

L'équivalence suivante est évidente :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} |u_n - \ell| = 0. \tag{1.12}$$

Exemple - Montrons que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n} = 0. \tag{1.13}$$

Soit $\epsilon > 0$. Cherchons un rang N tel que pour tout $n \geq N$, $\dfrac{1}{n} \leq \epsilon$. Cette inégalité est équivalente à $\dfrac{1}{\epsilon} \leq n$. Prenons $N = E(\frac{1}{\epsilon}) + 1$. D'après (1.4), $N \geq \frac{1}{\epsilon}$ et ainsi $\frac{1}{N} \leq \epsilon$. Donc, pour tout $n \geq N$,

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \leq \epsilon.$$

Ceci montre (1.13).

Proposition 5 *Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites réelles telles que*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \ell_1 \quad et \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n = \ell_2.$$

Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors, on a :

(i) $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} (u_n + v_n) = \ell_1 + \ell_2$,

(ii) $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} (u_n v_n) = \ell_1 \ell_2$,

(iii) $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} (a u_n) = a\ell_1$,

(iv) si, pour tout $n \geq n_0$, $v_n \neq 0$ et $\ell_2 \neq 0$, alors $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$.

Cette proposition et la relation (1.13) permettent de calculer les limites de plusieurs suites.

Exemple - Calculons la limite de la suite $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$. On a

$$\frac{2n+1}{n+1} = \frac{n(2+\frac{1}{n})}{n(1+\frac{1}{n})} = \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}.$$