SYNTHESES DE COURS

Chapitre 1. Cinématique du point matériel

Définitions

- **Point matériel**

Un objet est considéré comme un point matériel si ses dimensions sont négligeables devant les dimensions de son mouvement.
Exemple : la terre est un point matériel dans son mouvement autour du soleil. En effet, rayon de la terre ~ 6500 Km et rayon de la trajectoire ~ 150 000 000 Km !

- **Cinématique du point**

La cinématique est l'étude du mouvement d'un point en fonction du temps, indépendamment de toute cause pouvant le provoquer ou le modifier.
Dans une étude cinématique, on ne s'intéresse donc pas aux forces.

- **Référentiel**

Un référentiel est un objet sur lequel se place l'observateur pour observer le mouvement du système étudié.

- **Repère spatial**

Un repère est la donnée d'un point O (généralement fixe dans le référentiel d'étude) et d'une base orthogonale de l'espace (c'est-à-dire un triplet de vecteurs unitaires orthogonaux entre eux). On note $R = \left(\mathrm{O}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$.

- **Repère temporel**

Il s'agit de choisir un instant comme origine des temps.
Pour étudier un mouvement, il faut donc fixer le système (point matériel en question), le référentiel par rapport auquel on observe le mouvement, les repères spatial et temporel dans lesquels l'étude se fait.

Vecteur position, vecteur vitesse, vecteur accélération

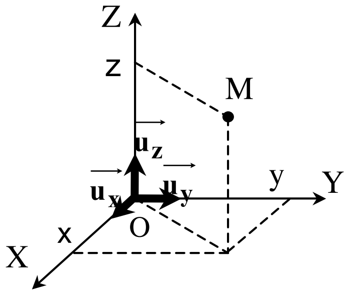
Pour étudier le mouvement d'un point, on a besoin des :

- vecteur position $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)$;
- vecteur vitesse $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt}(t)$;
- vecteur accélération $\vec{a} = \dfrac{d^2\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{dt^2}(t)$.

Ces vecteurs sont exprimés dans un repère R.

◆ Différents types de repère

- **Repère cartésien**



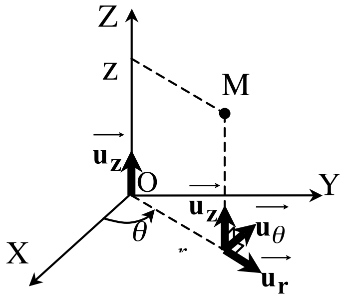
$R = \left(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\right)$

$\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$

$\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z$

$\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z$

- **Repère cylindrique**



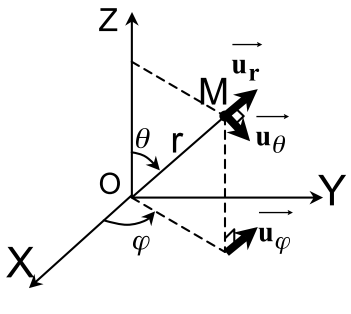
$R = \left(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z\right)$

$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$

$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$

$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z$

- **Repère sphérique**



$R = \left(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi\right)$

$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$

$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{u}_\varphi$

L'expression de $\vec{a}$ est compliquée.

Rappel : Les notations $\dot{a}$ et $\ddot{a}$ signifient respectivement $\dfrac{da}{dt}$ et $\dfrac{d^2a}{dt^2}$.

◆ Mouvements à vecteur accélération constant

- **Mouvement rectiligne uniforme**

Si $\vec{a} = \vec{0}$, le mouvement est rectiligne uniforme, c'est-à-dire :

- la trajectoire est une droite ;
- la vitesse est constante **en vecteur** $\vec{v} = \vec{v}_0$.

MECANIQUE

On choisit un axe sur la trajectoire, dans le sens du mouvement avec l'origine à la position initiale et les équations horaires sont $\ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = v_0 \Rightarrow x = v_0 t$. Si l'origine est mal choisie, $x = v_0 t + x_0$.

- **Mouvement rectiligne uniformément accéléré**

Si $\vec{a} = \overrightarrow{\text{cte}} \neq \vec{0}$ et $\vec{v}_0 \,//\, \vec{a}$, le mouvement est rectiligne uniformément accéléré, la trajectoire est une droite.

On choisit un axe sur la trajectoire avec l'origine à la position initiale et les équations horaires sont $\ddot{x} = a \Rightarrow \dot{x} = at + \dot{x}_0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}at^2 + \dot{x}_0 t$, où $\dot{x}_0$ est la valeur algébrique de la vitesse initiale et a celle de l'accélération. Si l'origine est mal choisie, $x = \frac{1}{2}at^2 + \dot{x}_0 t + x_0$.

- **Mouvement parabolique**

Si $\vec{a} = \overrightarrow{\text{cte}} \neq \vec{0}$ mais $\vec{v}_0$ non colinéaire à $\vec{a}$, la trajectoire est une parabole située dans le plan $(\text{O}, \vec{v}_0, \vec{a})$ où O est la position initiale.

On choisit dans ce plan un axe colinéaire à $\vec{a}$ avec l'origine à la position initiale et les équations horaires sont $\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos\alpha \\ \dot{y} = v_0 \sin\alpha + at \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = (v_0 \cos\alpha)t \\ \dot{y} = (v_0 \sin\alpha)t + \frac{1}{2}at^2 \end{cases}$. Si l'origine est mal choisie, $\begin{cases} \dot{x} = (v_0 \cos\alpha)t + x_0 \\ \dot{y} = (v_0 \sin\alpha)t + \frac{1}{2}at^2 + y_0 \end{cases}$.

◆ Mouvements circulaires

Il s'agit d'un mouvement dont la trajectoire est un cercle. On choisit un repère polaire ayant pour origine le centre de la trajectoire en choisissant généralement $\theta = 0$ pour la position initiale.

Le point matériel est alors repéré par son angle $\theta(t)$ et on appelle vitesse angulaire le terme $\dot{\theta}(t)$. On a $\overrightarrow{\text{OM}} = R\vec{u}_r$, $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ et $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta = -\frac{v^2}{R}\vec{u}_r + \frac{dv}{dt}\vec{u}_\theta$.

- **Mouvement circulaire uniforme**

Lorsque $\dot{\theta}(t) = \omega = \text{cte}$, on parle de mouvement circulaire uniforme. On a alors $\theta(t) = \omega t \underbrace{(+\theta_0)}_{\text{si origine mal choisie}}$, $\dot{\theta}(t) = \omega$ et $\ddot{\theta}(t) = 0$, ce qui donne $\overrightarrow{\text{OM}} = R\vec{u}_r$, $\vec{v} = R\omega\vec{u}_\theta$ (vitesse constante en norme) et $\vec{a} = -R\omega^2\vec{u}_r = -\frac{v^2}{R}\vec{u}_r$.

Chapitre 2. Dynamique du point matériel

Grandeurs dynamiques

Quantité de mouvement : $\vec{p} = m\vec{v}$

Moment cinétique par rapport O $\vec{L}_{(M/O)} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$

Ces grandeurs sont définies dans un référentiel R.

Les lois de Newton

- **1ère loi de Newton : principe d'inertie**

Il existe des référentiels dits galiléens dans lesquels toute particule isolée (i.e. qui ne subit aucune force) est animée d'un mouvement rectiligne uniforme.

- **2ème loi de Newton : principe fondamental de la dynamique**

Soit un point matériel M de masse m soumis à des forces extérieures dont la somme est notée $\sum \vec{F}$ dans un référentiel galiléen. Le principe fondamental de la dynamique (PFD) ou relation fondamentale de la dynamique (RFD) est $m\vec{a} = \sum \vec{F}$.

- **3ème loi de Newton : principe de l'action et de la réaction**

Si un point matériel A exerce la force $\vec{F}_{A\to B}$ sur un point matériel B, celui-ci exerce sur A la force $\vec{F}_{B\to A} = -\vec{F}_{A\to B}$. Ces deux forces sont portées par la droite (AB).

Théorème du moment cinétique TMC

Programme de seconde période

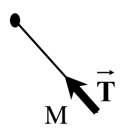
Le moment d'une force $\vec{F}$ appliquée sur un point M par rapport à O est défini par $\vec{M}_{\vec{F}}(O) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$.

Théorème du moment cinétique : dans un référentiel galiléen R, on a $\dfrac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{M}_{\vec{F}}(O)$. Il découle directement du PFD.

Quelques exemples de forces

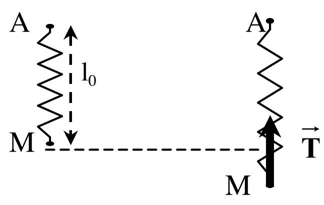
- **Forces de contact**

Tension d'un fil $\vec{T}$



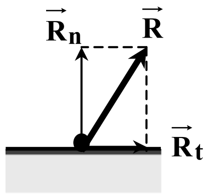
Tension d'un ressort $\vec{T} = -k\left(\overrightarrow{AM} - \dfrac{\overrightarrow{AM}}{\left\|\overrightarrow{AM}\right\|} l_0\right)$

k : raideur du ressort
l_0 : longueur du ressort au repos



Réaction d'un plan $\vec{R}$

$\vec{R}_n$: Réaction normale et $\vec{R}_t$: Réaction tangentielle ou force de frottement. Lorsque le point est en mouvement par rapport au plan, elle est opposée au sens du mouvement.



- **Forces à distance**

Poids : $\vec{P} = m\vec{g}$

Attraction coulombienne : $\vec{F} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1 q_2}{\mathrm{M_1M_2}^3}\overrightarrow{\mathrm{M_1M_2}}$.

Attraction gravitationnelle : $\vec{F} = -G\dfrac{m_1 m_2}{\mathrm{M_1M_2}^3}\overrightarrow{\mathrm{M_1M_2}}$.

Force de Lorentz : $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$.

Chapitre 3. Travail, Puissance, Énergie

Travail et puissance d'une force

Soit un point matériel M de vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel R soumis à une force $\vec{F}$.

La puissance de $\vec{F}$ est définie par $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$.

Le travail élémentaire de $\vec{F}$ sur un déplacement $d\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \vec{v}dt$ est défini par $\delta W = \vec{F} \cdot d\overrightarrow{\mathrm{OM}}$.

Le travail de $\vec{F}$ entre deux points A et B est alors $W_{A\to B} = \int_A^B \delta W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\overrightarrow{\mathrm{OM}}$.

Énergie cinétique et théorème de l'énergie cinétique (TEC)

- **Énergie cinétique**

Soit un point matériel M de masse m et de vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel R. Alors M possède une énergie dite cinétique définie par $E_c = \dfrac{1}{2}mv^2$.

Théorème de l'énergie cinétique : dans un référentiel galiléen R, $\dfrac{dE_c}{dt} = \sum P\left(\vec{F}\right)$, ou encore $\Delta E_c\left(\mathrm{A} \to \mathrm{B}\right) = \sum W_{\mathrm{A\to B}}\left(\vec{F}\right)$.

Force conservative, énergie potentielle

- **Force conservative**

On dit que $\vec{F}$ est une force conservative si $\delta W = \vec{F} \cdot d\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ est une différentielle totale c'est-à-dire si $\oint_{\text{chemin fermé}} \vec{F} \cdot d\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \oint_{\text{chemin fermé}} \delta W = 0$.

- **Énergie potentielle**

Si $\vec{F}$ est une force conservative, alors elle dérive d'une énergie potentielle E_p telle que $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$ et on a donc $\delta W(\vec{F}) = -dE_p$ ou $W(\vec{F}) = -\Delta E_p$.
E_p est définie à une constante près, choisie arbitrairement en définissant un état de référence pour lequel $E_p = 0$.

- **Position d'équilibre**

Soit un point M dont la position dans l'espace ne dépend que d'un seul paramètre x soumis à une force $\vec{F}$ qui dérive d'une énergie potentielle $E_p(x)$.

On dit que la position $x = x_0$ est une position d'équilibre si $\left(\dfrac{dE_p}{dx}\right)_{x = x_0} = 0$.

- $x = x_0$ est une position d'équilibre stable si $E_p(x_0)$ est un minimum, ce qui est généralement identifié par $\dfrac{d^2E_p}{dx^2} > 0$;
- $x = x_0$ est une position d'équilibre instable si $E_p(x_0)$ est un maximum, ce qui est généralement identifié par $\dfrac{d^2E_p}{dx^2} < 0$.

◆ Énergie mécanique, théorème de l'énergie mécanique

- **Définition**

Soit un point matériel M d'énergie cinétique E_c soumis à une (ou plusieurs) force conservative qui dérive d'une (ou plusieurs) énergie potentielle E_p. L'énergie mécanique E_m est définie par $E_m = E_c + E_p$ ou $E_m = E_c + \sum E_p$ s'il y a plusieurs forces conservatives.

- **Théorème de l'énergie mécanique**

Théorème de l'énergie cinétique : dans un référentiel galiléen R :

$$\Delta E_c(\text{A} \to \text{B}) = \sum W_{\text{A}\to\text{B}}(\vec{F}).$$

On a ainsi :

$$\Delta E_c(\text{A} \to \text{B}) = \underbrace{\sum_{\vec{F}\,\text{conservatives}} W_{\text{A}\to\text{B}}(\vec{F})}_{-\Delta E_p} + \sum_{\vec{F}\,\text{non conservatives}} W_{\text{A}\to\text{B}}(\vec{F}).$$

On obtient le théorème de l'énergie mécanique :

$$\Delta E_m(\text{A} \to \text{B}) = \sum_{\vec{F}\,\text{non conservatives}} W_{\text{A}\to\text{B}}(\vec{F}).$$

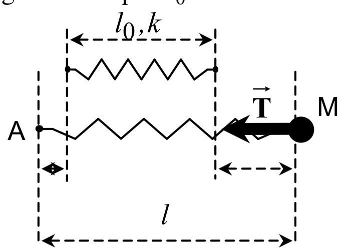
En particulier, si M n'est soumis à aucune force non conservative alors $E_m = cte$.
Exemples de forces non conservatives : forces de frottements, solide ($f = \text{cte}$), fluide ($\vec{f} = -h\vec{v}$), de l'air ($f = -kv^2$).

Chapitre 4. Oscillateurs (programme de début d'année)

Tension d'un ressort, énergie potentielle

Un ressort est caractérisé par sa raideur k et sa longueur au repos l_0.

Expression générale de la tension d'un ressort appliquée sur un point matériel M : $\vec{T} = -k\left(\overrightarrow{AM} - \frac{\overrightarrow{AM}}{\left\|\overrightarrow{AM}\right\|} l_0\right)$.

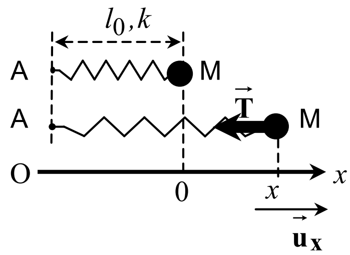


La tension d'un ressort dérive d'une énergie potentielle donnée par :

$$E_p = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 + \text{cte}$$

Dans le cas ou l'extrémité A est fixe ainsi que la direction du ressort (et seulement dans ce cas), on a $T = -kx\vec{u}_x$ et $E_p = \frac{1}{2}kx^2 + \text{cte}$,

à condition d'avoir choisi l'origine de l'axe en la position au repos du ressort.



Oscillateur harmonique

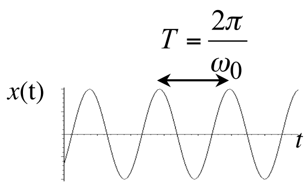
A fixe et x est l'abscisse de M (masse m) mesurée par rapport à la position d'équilibre.

Forces appliquées :

tension du ressort $\vec{T} = -kx\vec{u}_x$.

Le PFD donne l'équation d'un oscillateur harmonique : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ où $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ est la pulsation propre de l'oscillateur harmonique

La solution de cette équation différentielle est de la forme $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$.



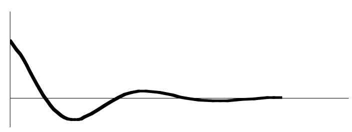
Oscillateur harmonique amorti en régime libre

Le même oscillateur est maintenant soumis en plus à une force de frottement fluide.

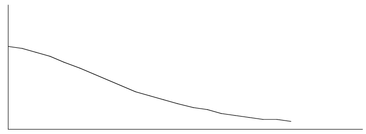
Forces appliquées : tension du ressort $\vec{T} = -kx\vec{u}_x$ et force de frottement $\vec{f} = -h\vec{v}$.

Le PFD donne l'équation d'un oscillateur harmonique amorti : $\ddot{x} + \frac{2}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ en posant $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $\tau = \frac{2m}{h}$.

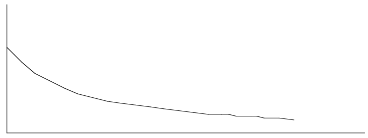
Selon le discriminant de l'équation caractéristique $r^2 + \frac{2}{\tau}r + \omega_0^2 = 0$ qui vaut $\Delta = 4\left(\frac{1}{\tau^2} - \omega_0^2\right)$, il y a trois régimes possibles :



– régime pseudo-périodique si $\omega_0\tau > 1$. Alors $x(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t)$ avec $\Omega^2 = \omega_0{}^2 - \frac{1}{\tau^2}$;



– régime critique si $\omega_0\tau = 1$. Alors $x(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}(At + B)$;



– régime apériodique si $w_0\tau < 1$. Alors $x(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}(A\,\mathrm{ch}\,\Omega t + B\,\mathrm{sh}\,\Omega t)$ avec $\Omega^2 = \frac{1}{\tau^2} - \omega_0{}^2$.

Il est d'usage d'introduire le facteur qualité $Q = \frac{m\omega_0}{h}$, sans dimension. L'équation s'écrit alors $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0{}^2 x = 0$ et on distingue les régimes pseudo-périodique (si $Q > \frac{1}{2}$), critique (si $Q = \frac{1}{2}$) et apériodique si $Q < \frac{1}{2}$.

Chapitre 5. Oscillateurs (programme de seconde période)

◆ Oscillateur harmonique amorti en régime forcé

On ajoute une force excitatrice $F = F_0\cos(\omega t)$. L'équation différentielle s'écrit alors : $\ddot{x} + \frac{2}{\tau}\dot{x} + \omega_0{}^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$ ou $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0{}^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$ de solution générale (après régime transitoire) $x(t) = x_0\cos(\omega t + \varphi)$. x_0 et φ s'obtiennent par la méthode complexe (exposée dans la partie exercices) : $x_0 = \frac{F_0}{m} / \sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0{}^2\right)^2 + \frac{\omega^2\omega_0{}^2}{Q^2}}$.

◆ Résonance

Un oscillateur harmonique amorti soumis à une excitation $F = F_0\cos(\omega t)$ présente une réponse $x(t) = x_0\cos(\omega t + \varphi)$ dont l'amplitude x_0 dépend de la fréquence :

– x_0 est maximum pour $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$, résonance en élongation ;

– $\dot{x}_0 = x_0\omega$ est maximum pour $\omega = \omega_0$, résonance en vitesse.

◆ Analogie mécanique – électricité

Elongation x	↔	Charge q
Vitesse $\dot{x}$	↔	Intensité i
Raideur k	↔	Inverse de la capacité($1/C$)