Déroulement de l'épreuve de mathématiques

Extrait de la note de service n° 2012-029 du 24 février 2012 (BOEN n° 13 du 29-3-2012)

Durée de l'épreuve : 2 heures
Nature de l'épreuve : écrite

Objectifs de l'épreuve

Pour tous les candidats, l'épreuve évalue les connaissances et compétences définies par le socle commun au palier 3. Pour les candidats de la série générale uniquement, les acquis à évaluer se réfèrent à l'intégralité du programme de la classe de troisième.
Dans l'esprit du socle commun, le sujet doit permettre d'apprécier la capacité du candidat à mobiliser ses connaissances et à mettre en œuvre une démarche scientifique pour résoudre des problèmes simples.

Structure de l'épreuve

Le sujet est composé de six à dix exercices indépendants. Il est indiqué au candidat qu'il peut les traiter dans l'ordre qui lui convient.
Les exercices correspondent aux exigences du socle commun pour la série professionnelle et portent sur différentes parties du programme de troisième pour la série générale. L'ensemble du sujet doit préserver un équilibre entre les quatre premiers items de la compétence 3 du socle commun de connaissances et de compétences – les principaux éléments de mathématiques et la culture scientifique et technologique – appliqués à l'activité de résolution d'un problème mathématique :

– rechercher, extraire et organiser l'information utile ;

– mesurer, calculer, appliquer des consignes ;
– modéliser, conjecturer, raisonner et démontrer ;
– argumenter et présenter les résultats à l'aide d'un langage adapté.

L'essentiel de l'épreuve évalue ces capacités.
Un des exercices au moins a pour objet une tâche non guidée, exigeant une prise d'initiative de la part du candidat.

Instructions complémentaires

Le sujet doit permettre à la plupart des candidats d'achever l'épreuve dans le temps imparti.
Certaines questions peuvent prendre la forme de questionnaires à choix multiple, d'autres conduisent à justifier un résultat.
Les exercices peuvent prendre appui sur des situations issues de la vie courante ou d'autres disciplines.
L'évaluation doit prendre en compte la clarté et la précision des raisonnements ainsi que, plus largement, la qualité de la rédaction scientifique. Les solutions exactes, même justifiées de manière incomplète, comme la mise en œuvre d'idées pertinentes, même maladroitement formulées, seront valorisées lors de la correction. Doivent aussi être pris en compte les essais, les démarches engagées, même non aboutis. Les candidats en sont informés par l'énoncé.
L'emploi des calculatrices est autorisé, dans le cadre de la réglementation en vigueur. Certains exercices peuvent faire un appel explicite à l'usage d'une calculatrice, dans le cadre des usages préconisés par le programme. Ce point est rappelé en tête du sujet.
Cette utilisation ne doit pas favoriser les élèves qui possèdent un matériel perfectionné.

Notation de l'épreuve

L'épreuve est notée sur 40 points.
Chaque exercice est noté entre 3 et 8 points, le total étant de 36 points. La note attribuée à chaque exercice est indiquée dans le sujet. Par ailleurs, 4 points sont réservés à la maîtrise de la langue.

1 Le théorème de Pythagore

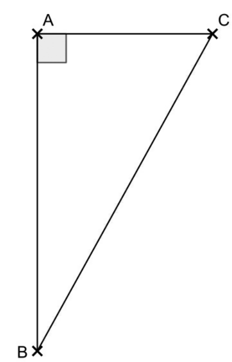
Notions indispensables

1. Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle

Propriété : Si un triangle est rectangle, alors le carré de la longueur de son hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit.
Donnée :
ABC est un triangle rectangle en A.
Conclusion :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

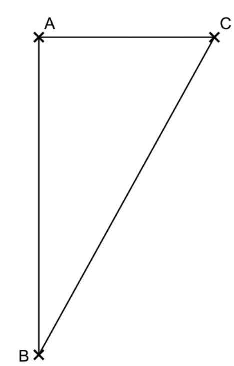
Le théorème de Pythagore sert à calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle lorsque l'on connaît les deux autres longueurs.



2. Caractériser un triangle rectangle

Propriété : Si dans un triangle, le carré de la longueur d'un côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.

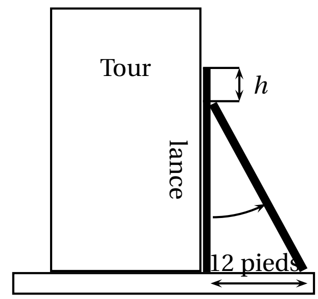
Donnée : Soit un triangle ABC.
$BC^2 = AB^2 + AC^2$
Conclusion : ABC est un triangle rectangle en B.
Dans un triangle, l'égalité de Pythagore permet de démontrer que ce triangle est rectangle.



Je m’exerce

Exercice 1 (3 points)
D’après le Brevet des collèges Centres étrangers 17 juin 2014

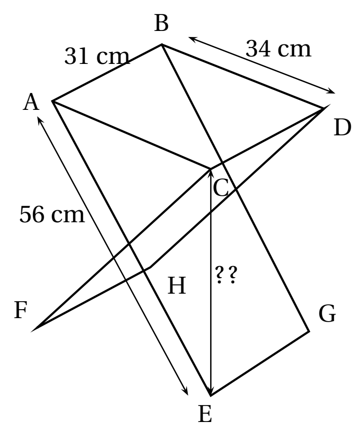
À Pise vers 1200 après J.-C. (problème attribué à Léonard de Pise, dit Fibonacci, mathématicien italien du Moyen Âge).
Une lance, longue de 20 pieds, est posée verticalement le long d’une tour considérée comme perpendiculaire au sol. Si on éloigne l’extrémité de la lance qui repose sur le sol de 12 pieds de la tour, de combien descend l’autre extrémité de la lance le long du mur ?
* Un pied est une unité de mesure anglo-saxonne valant environ 30 cm.



Exercice 2 (3 points)
D’après le Brevet des collèges Amérique du Nord 11 juin 2014

Pour une bonne partie de pêche au bord du canal, il faut un siège pliant adapté !
Nicolas est de taille moyenne et pour être bien assis, il est nécessaire que la hauteur de l’assise du siège soit comprise entre 44 cm et 46 cm.
Voici les dimensions d’un siège pliable qu’il a trouvé en vente sur internet :
longueur des pieds : 56 cm
largeur de l’assise : 34 cm
profondeur de l’assise : 31 cm

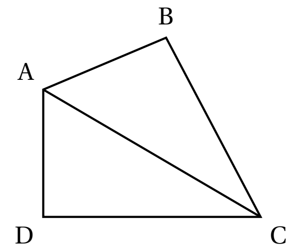
L’angle $\widehat{ACE}$ est droit et ABCD est un rectangle.
La hauteur de ce siège lui est-elle adaptée ?



Exercice 3 (4 points)
D’après le Brevet des collèges Amérique du Sud novembre 2013

Jean-Michel est propriétaire d’un champ, représenté par le triangle ABC ci-dessous. Il achète à son voisin le champ adjacent, représenté par le triangle ADC. On obtient ainsi un nouveau champ formé par le quadrilatère ABCD.
Jean-Michel sait que le périmètre de son champ ABC est de 154 mètres et que BC = 56 m.
Son voisin l’informe que le périmètre du champ ADC est de 144 mètres et que AC = 65 m.

De plus, il sait que AD = 16 m.



1. a. Justifier que les longueurs AB et DC sont respectivement égales à 33 m et 63 m.

b. Calculer le périmètre du champ ABCD.

2. Démontrer que le triangle ADC est rectangle en D.

On admet que le triangle ABC est rectangle en B.

3. Calculer l'aire du champ ABCD.

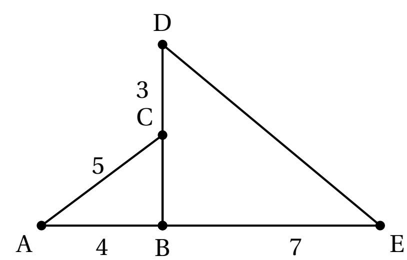
4. Jean-Michel veut clôturer son champ avec du grillage. Il se rend chez son commerçant habituel et tombe sur l'annonce suivante :

$\boxed{\text{Grillage : 0,85 € par mètre}}$

Combien va-t-il payer pour clôturer son champ ?

Exercice 4 (4 points)
D'après le Brevet des collèges Nouvelle-Calédonie 10 décembre 2013

Sur le dessin ci-contre, les points A, B et E sont alignés, et C le milieu de [BD].



1. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

2. En déduire la nature du triangle BDE.

3. Calculer ED arrondir le résultat au dixième.

Exercice 5 (4 points)
D'après le Brevet des collèges Polynésie juin 2013

1. Construis un triangle ABC rectangle en C tel que AB = 10 cm et AC = 8 cm.

2. Calcule la longueur BC (en justifiant précisément).

3. a. Place le point M de l'hypoténuse [AB] tel que AM = 2 cm.

b. Trace la perpendiculaire à [AC] passant par M. Elle coupe [AC] en E.

c. Trace la perpendiculaire à [BC] passant par M. Elle coupe [BC] en E.

d. À l'aide des données de l'exercice, recopie sur ta copie la proposition que l'on peut directement utiliser pour prouver que le quadrilatère MFCE est un rectangle.

Proposition 1 : Si un quadrilatère a 4 angles droits alors c'est un rectangle.

Proposition 2 : Si un quadrilatère est un rectangle alors ses diagonales ont la même longueur.

Proposition 3 : Si un quadrilatère a 3 angles droits alors c'est un rectangle.

2 Calcul numérique

Notions indispensables

1. Nombres relatifs en écriture fractionnaire

Définition : Une *fraction irréductible* est une fraction que l'on ne peut pas simplifier.

Propriété des produits en croix : a, b, c, d désignent des nombres relatifs avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$.

Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ alors $a \times d = b \times c$.

Si $a \times d = b \times c$ alors $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Propriété de l'addition (et de la soustraction) avec un même dénominateur :

Pour additionner (ou soustraire) deux nombres relatifs en écriture fractionnaire ayant le *même dénominateur* :

- on additionne (ou soustrait) *leurs numérateurs* ;
- on garde leur dénominateur commun.

a,b et c étant des nombres relatifs ($c \neq 0$),

$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$ et $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$

Propriété de l'addition (et de la soustraction) avec un dénominateur différent :

Pour additionner (ou soustraire) deux fractions de *dénominateur différent*, on doit d'abord les mettre au même dénominateur.

Propriété de la multiplication :

Pour multiplier deux nombres relatifs en écriture fractionnaire :

- on multiplie leurs *numérateurs entre eux* ;
- on multiplie leurs dénominateurs entre eux.

a, b, c et d étant des nombres (avec $c \neq 0$ et $d \neq 0$),

$$\frac{a}{c} \times \frac{b}{d} = \frac{a \times b}{c \times d}$$

Propriété de la division :

Pour diviser deux nombres relatifs en écriture fractionnaire, *on multiplie le premier par l'inverse du deuxième*.

2. Puissances d'un nombre relatif

Puissances d'exposant entier positif

Définition : a désigne un nombre entier relatif et n un nombre entier positif non nul.

a^n désigne le produit de n facteurs égaux à a.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

a^n est une *puissance* du nombre a.

a^n se lit « a exposant n ».
Le nombre n s'appelle un *exposant*.

Convention : Pour $a \neq 0$, on convient que $a^0 = 1$

Puissances d'exposant entier négatif

Définition : a désigne un nombre relatif *non nul* et n un nombre entier positif.

a^{-n} désigne l'inverse de a^n.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Cas particulier :

Pour $a \neq 0$, $a^{-1} = \frac{1}{a^1} = \frac{1}{a}$ donc a^{-1} est une autre écriture de l'inverse de a.

Propriétés des calculs avec les puissances

Propriétés : Soient a et b deux nombres relatifs non nuls et m et p deux entiers relatifs. On a :

$a^m \times a^p = a^{m+p}$

$$\frac{a^m}{a^p} = a^{m-p}$$

$$\left(a^m\right)^p = a^{m \times p}$$

$$a^m \times b^m = \left(ab\right)^m$$

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

Priorités des opérations

Propriété : Pour calculer une expression, on effectue :

– tout d'abord les calculs entre parenthèses ;
– ensuite les puissances ;
– puis les multiplications et les divisions ;
– et enfin les additions et les soustractions.

Quand des opérations ont le même niveau de priorité, on les effectue de gauche à droite.

Notation scientifique d'un nombre

Définition : *L'écriture scientifique* d'un nombre décimal différent de 0 est la seule écriture de la forme $a \times 10^n$ où :

– a est un nombre décimal écrit avec un seul chiffre autre que 0 avant la virgule ;
– a est un nombre entier relatif.

Je m'exerce

Exercice 1 (3 points)
D'après le Brevet des collèges Asie juin 2014

On laisse tomber une balle d'une hauteur de 1 mètre.

À chaque rebond, elle rebondit des $\frac{3}{4}$ de la hauteur d'où elle est tombée.

Quelle hauteur atteint la balle au cinquième rebond ? Arrondir au cm près.

Exercice 2 (4 points)
D'après le Brevet des collèges Polynésie septembre 2014

Pour choisir un écran de télévision, d'ordinateur ou une tablette tactile, on peut s'intéresser :

– à son format qui est le rapport longueur de l'écran largeur de l'écran.
– à sa diagonale qui se mesure en pouces. Un pouce est égal à 2,54 cm.