Première partie

Les objectifs généraux du programme, le vocabulaire, les méthodes de base

L'objectif de cette partie est triple :

- Mettre en place un vocabulaire aussi précis que possible.
- Expliciter la logique.
- Rappeler un certain nombre de méthodes générales.

Le premier chapitre comporte donc un glossaire de base des mathématiques, qui utilise souvent des mots du langage courant, mais dans un sens spécifique aux mathématiques. La méconnaissance de ces spécificités entraîne parfois de la part des élèves un mauvaise compréhension des énoncés, que ce soit ceux des définitions et théorèmes du cours ou ceux des exercices et problèmes qui leur sont soumis.
Le second chapitre aborde les notions relatives à la logique, qui font partie des objectifs généraux du programme, et sont explicitées d'une façon que les professeurs respectueux du programme ne peuvent se permettre, mais qui je pense a toute sa place dans une telle publication. Elle permet de mettre en avant la cohérence, la force et la simplicité de la logique booléenne telle qu'elle est pratiquée tous les jours par les mathématiciens.
Le troisième chapitre contient des rappels sur les méthodes générales qui sont censées avoir été acquises au fil des années.
En outre, la notion fondamentale de composition des fonction est introduite et explicitée ici.
Bien qu'officiellement hors programme, cette notion est omniprésente, et un certain nombre de notions et de formules seront rendues plus accessibles, par ce principe unificateur, dont la compréhension rendra sans doute aussi moins mystérieux le problème de détermination de l'ensemble de définition d'une fonction. A cette occasion, la notion hors programme d'image d'une fonction sera introduite.

Chapitre 1

Glossaire

1.1 Mots français utilisés en mathématiques

1. **alors** : Réservons le mot « alors » à la locution « si ...alors ... », qui traduit une implication. Elle est utilisée pour énoncer une propriété. A et B étant deux propositions, (voir 21), « Si A alors B » n'affirme absolument pas que la proposition A soit vraie, mais que si elle l'est alors la proposition B l'est aussi. Lorsqu'on applique un résultat énoncé « si...alors ... », on dit « On a ...donc ... ».

2. **appartient à** : est à utiliser pour indiquer qu'un élément appartient à un ensemble. Ne jamais remplacer par le symbole $\in$ dans une phrase en français, où l'expression en toutes lettre a seule sa place.

3. **conjecture** : est une proposition dont on pense qu'elle est vraie, et que l'on se propose de démontrer (ou qu'on aimerait pouvoir démontrer).

   Voir aussi 12

4. **donc** : exprime une implication. Ne jamais l'utiliser pour dire ce qu'on va faire, comme on peut le faire dans le langage courant « j'ai fait ceci donc maintenant je vais faire cela », qui ne fait qu'exprimer une habitude, de la suite dans les idées si on veut, mais pas une déduction. Il ne doit être utilisé dans une copie de math que pour exprimer une déduction.

5. **égale** : exprime que les deux expressions écrites de part et d'autre ont la même valeur.

6. **élément de** : a est élément de A exprime la même chose que « a appartient à A ».

7. **ensemble** : Un ensemble est une collection d'objets, qui peuvent être absolument quelconques. Bien sûr certains ont plus d'intérêt que d'autres. La seule chose à laquelle on s'intéresse à propos d'un ensemble est de savoir si tel ou tel objet (on parle alors d'élément) en fait partie (on dit qu'il lui appartient). En

particulier, il n'y a pas de notion d'ordre, il n'y a pas de premier élément ni de dernier.

Pour décrire un ensemble, on a recours lorsque c'est possible à l'énumération directe ou symbolique de ses éléments. On utilise dans cette situation des accolades « $\{\ldots\}$ ». Entre les accolades une liste dont l'ordre importe peu, d'éléments, séparés par des virgules, ou s'il y a ambigüité par des points-virgules.

Voir aussi l'entrée 20 du glossaire.

8. **équivaut (à)** : Ce mot est exclusivement destiné à relier deux propositions. Il signifie que les deux propositions qu'il relie sont vraies ou fausses en même temps. Pour « A équivaut à B », on peut également dire « A (est vraie) si et seulement si B (est vraie) ». (Remarquez qu'en général on omet « est vraie », parce que le discours en math consiste à ne dire que des affirmations vraies. Attention à ne pas penser à « équivaut » comme si cela voulait dire « c'est pratiquement pareil » : le sens est beaucoup plus précis !

   Il est indifférent de dire « A équivaut à B » ou bien « A implique B et B implique A ». Voir l'entrée 14.

9. **et** : est un « connecteur logique ». Il sert à construire une nouvelle proposition à partir de deux propositions. La nouvelle proposition « A et B », formée à partir des propositions A et B, est vraie si et seulement si les deux propositions sont vraies. (voir aussi « ou » entrée 19 du glossaire).

10. **expression** : toute suite de caractères et de symboles que l'on peut évaluer. Le résultat de l'évaluation est toujours un élément d'un ensemble d'objets d'intérêt : un nombre, un booléen (vrai ou faux), un vecteur, etc... Quand on demande quelle est la nature d'une expression, c'est à cela qu'on s'intéresse : est-ce un nombre, un vecteur, un booléen ? Si le résultat est un booléen, l'expression à laquelle on s'intéresse est probablement une proposition...

11. **facteur** : désigne l'un des nombres (ou l'une des expressions dont l'évaluation donnerait un nombre) qui intervient dans un produit.

12. **hypothèse** : Une hypothèse est comme en français une proposition dont on ne sait pas si elle est vraie. Ceci entraîne parfois une certaine confusion parce que nous avons pris l'habitude de considérer que les hypothèses de nos exercices sont vraies...

    C'est oublier l'objet des mathématiques, qui est de démontrer. Que démontre-t-on ? Que si certaines hypothèses sont vraies alors une certaine conclusion est également vraie : raison pour laquelle dans un exercice on considère toujours que les hypothèses sont vraies, puisque le cas où elles seraient fausses ne nous intéresse pas.

    Une certaine confusion à propos de ce mot provient du fait qu'il est employé en sciences expérimentales dans deux sens différents, dont l'un correspond à peu près à celui que nous employons en mathématiques (on fait des hypothèses qui fixent le cadre dans lequel on va travailler, et sous réserve qu'elles soient vérifiées, ce qu'on va affirmer sera vrai), et l'autre correspond au mot « conjecture » : on pense qu'un certain modèle est vrai (c'est l'hypothèse), et l'on voudrait tester sa véracité par une expérience. Cette hypothèse sera, si l'expérience est concluante, tenue pour vraie : elle est « démontrée » (au sens des sciences expérimentales).

Voir aussi conjecture (entrée 3).

13. **il existe** : indique qu'il y a au moins un élément d'un ensemble qui satisfait une certaine condition. Par exemple « Il existe un entier tel qu'il soit égal à la somme de ses diviseurs » est vraie. Cette proposition signifie qu'il y en a au moins un qui vérifie cette condition. (attention à la bonne compréhension de l'expression « tel que », voir référence 26 du glossaire).

14. **implique** : Ce mot est exclusivement destiné à relier deux propositions. Il signifie que si la première deux propositions est vraie, alors la seconde l'est également. Mais attention A implique B ne signifie pas que A soit vraie.

    Dans nos rédactions, comme nous nous attachons à démontrer des affirmations, nous veillons à ce que la proposition située avant ce mot soit vraie, pour pouvoir en déduire (par un théorème énonçant « si...alors ... ») que celle qui suit est également vraie : c'est ce qu'on appelle démontrer.

15. **inclus** : relie deux ensemble. Dire que A est inclus dans B sous-entend que A et B sont des ensembles, et signifie que tous les éléments de A sont aussi des éléments de B. Dans ce cas, on dit aussi que A est un sous-ensemble de B, ou encore que c'est une partie de B. Voir aussi l'entrée 20.

16. **membre** : désigne l'une des deux expressions qui se trouvent de part et d'autre d'un signe « = » ou d'une inégalité.

17. **nécessaire** : Une condition nécessaire, c'est comme dans le langage courant, une condition dont on a besoin. Pour quoi ? Pour qu'une autre soit vraie. Autrement dit, si la condition nécessaire n'est pas vérifiée, l'autre ne l'est pas.

    Soyons plus précis : quand on dit que A implique B, B est la condition nécessaire. En effet, si B est fausse, A ne peut pas être vraie, puisque si elle l'était, B serait vraie également...

    On voit donc aisément que si l'on sait que A implique B, on sait également que non$B$ implique non$A$: c'est la contraposée.

    Et comme évidemment la contraposée de la contraposée, c'est la proposition d'origine, une implication et sa contraposée sont équivalentes : les deux sont vraies en même temps ou fausses en même temps.

    (Attention, dans la discussion qui précède, ce qu'on discute est la vérité des implications, pas celle des propositions A et B).

    Voir entrée 25 du glossaire pour « suffisant » et 14 du glossaire pour « implique ».

18. **or** : est utilisé pour introduire une proposition dont on sait par ailleurs qu'elle est vraie, et que l'on va utiliser dans son raisonnement. Il est intéressant lorsqu'on utilise ce mot, de préciser d'où vient la certitude que la proposition soit vraie. Par exemple, on peut dire « ...or d'après la question 3, ... » ou bien « ...or par le théorème de Pythagore on a ... »...

19. **ou** : est un « connecteur logique ». Il sert à construire une nouvelle proposition à partir de deux propositions. La nouvelle proposition « A ou B », formée à partir des propositions A et B, est vraie si et seulement si au moins l'une des deux propositions est vraie. (voir aussi « et » entrée 9 du glossaire).

20. **partie** : Une partie B d'un ensemble A, aussi appelée « sous-ensemble » est un ensemble dont tous les éléments appartiennent à A : dire que B est une partie de A signifie que B est inclus dans A (voir aussi 15 dans le glossaire).

    Remarque : deux parties remarquables de A sont A lui-même, et l'ensemble vide, noté $\emptyset$.

21. **proposition** : En mathématiques, une proposition est une affirmation. On la reconnaît à ce qu'elle peut être vraie ou fausse. Par exemple, « $x > 0$ », $a = b$, « la fonction f est convexe » sont des propositions. Elles sont susceptibles d'être vraies ou fausses. En revanche, $x^2 - 2x + 3$ n'est pas une proposition, c'est (semble-t-il) un nombre. L'activité principale en mathématiques consiste à démontrer que des propositions sont vraies sous certaines conditions : c'est-à-dire démontrer des théorèmes.

22. **quel que soit** : indique que tous les éléments d'un ensemble satisfont une certaine condition. Par exemple « quelque soit l'entier naturel n supérieur ou égal à deux, il peut se décomposer en un produit de facteurs premiers » est vraie. (Voir aussi référence 13 du glossaire).

23. **si** : ne va pas sans « alors » : voir 1. Exprime une hypothèse (voir 12).

24. **soit** : Ce mot est utilisé dans quatre occasions :

    (a) Dans le sens « Je choisis au hasard un certain élément auquel je donne un nom ». Par exemple, « Soit $x \in \mathbb{R}$ » signifie qu'on donne le nom x à un réel choisi au hasard dans l'ensemble des réels. En général, on va ensuite démontrer une propriété qui sera vérifiée pour ce nombre x. Puisqu'il a été « choisi au hasard », la propriété qui aura été démontrée sera vraie pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$.

    (b) Dans le sens « Je prends une notation ». Par exemple « Soit f définie par $f(x) = 3x+2$ » signifie qu'on donne un nom, f, à la fonction qui à x associe $3x + 2$. Il va sans dire que dans ce cas-là, f est parfaitement bien définie, elle n'est pas « prise au hasard ».

    (c) Dans le sens « ou bien ... ou bien... ». Par exemple, « un entier est soit pair soit impair. Mais là c'est en fait simplement du français. Il faut portant bien noter que l'idée mathématique sous-jacente est la disjonction des cas.

    (d) Dans le sens « C'est-à-dire ». Par exemple : « On a donc $x = 8 - 9 + 3$, soit $x = 2$ ».

25. **suffisant** : exprime à propos d'une condition que l'on est certain, si elle est vérifiée, qu'une autre proposition sera vraie. Lorsque l'on sait que A implique B, A est une condition suffisante pour que B soit vraie. Il se peut qu'elle ne soit pas nécessaire. Par exemple pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme, il suffit que ce soit un rectangle, mais ce n'est pas nécessaire.

Voir 17 : nécessaire.

26. **tel que** : doit pouvoir se remplacer dans la phrase par « qui vérifie », sans que la phrase ne devienne bizarre, puisque c'est exactement ce que cela signifie.

27. **terme** : possède deux significations, que l'on peut distinguer selon le contexte :

    (a) dans une expression, désigne l'un des nombres (ou l'une des expressions dont l'évaluation donnerait un nombre) qui intervient dans une somme.

    (b) dans une suite, désigne l'un des nombres (ou l'une des expressions permettant de le calculer) constituant la suite. C'est l'image d'un entier par la suite (qui, on le rappelle, est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$).

1.2 Symboles

1. $\subset$: est le symbole utilisé pour indiquer l'inclusion. On trouve donc toujours à sa droite et à sa gauche un ensemble.

   $A \subset B$ signifie (et se lit) A est inclus dans B.

2. $\in$: est le symbole utilisé pour indiquer l'appartenance. On trouve donc toujours à sa gauche un élément et à sa droite un ensemble.

   $a \in B$ signifie (et se lit) a appartient à B.

3. $=$: est le symbole utilisé pour indiquer l'égalité. On trouve donc toujours à sa droite et à sa gauche deux objets mathématiques de même nature (deux nombres, deux vecteurs, deux fonctions, etc...).

   $A = B$ signifie (et se lit) A égale B.

4. $\Rightarrow$: est le symbole utilisé pour indiquer l'implication. On trouve donc toujours à sa droite et à sa gauche une proposition.

   $A \Rightarrow B$ signifie (et se lit) A implique B.

5. $\Leftrightarrow$: est le symbole utilisé pour indiquer l'équivalence. On trouve donc toujours à sa droite et à sa gauche une proposition.

   Remarque : une proposition est une affirmation qui peut être vraie ou fausse. C'est le cas d'une équation, qui est vraie quand les inconnues prennent pour valeur des solutions, et fausse sinon.

   $A \Leftrightarrow B$ signifie (et se lit) A équivaut à B.

6. $\forall$: est appelé quantificateur universel. Il indique que la proposition qui va suivre est vraie pour toutes les valeurs possibles de la variable qu'il quantifie. On trouve donc toujours à sa droite un symbole représentant un objet mathématique.

   $\forall x$ signifie (et se lit) Quel que soit x. (ou bien pour tout x).

7. $\exists$: est appelé quantificateur existentiel. Il indique que la proposition qui va suivre est vraie pour au moins une des valeurs possibles de la variable qu'il quantifie. On trouve donc toujours à sa droite un symbole représentant un objet mathématique. Il est souvent suivi de $\in$ pour indiquer l'ensemble des valeurs possibles puis de « tel que » pour introduire la proposition qui est vérifiée.

   $\exists x$ signifie (et se lit) Il existe x.

   $\exists x \in A$ tel que $P(x)$ signifie (et se lit) Il existe x appartenant à A tel que $P(x)$ (soit vraie).

8. $\rightarrow$: est le symbole utilisé pour indiquer pour une fonction f l'ensemble de départ (celui dans lequel la variable prend ses valeurs) et l'ensemble d'arrivée (celui dans lequel on trouve les images). On trouve donc toujours à sa droite et à sa gauche un ensemble. Attention, ce symbole ayant une signification bien précise, ne l'utilisez pas comme marque typographique !

   $f : A \rightarrow B$ signifie (et se lit) f de A dans B.