

# Chapitre 1

# Cinématique du solide indéformable

Le lancement des premiers modules de la **Station spatiale internationale** a été réalisé en 1998. C'est un projet piloté par la **NASA**, développé conjointement avec l'agence spatiale fédérale russe **FKA**, et avec la participation des agences spatiales européenne **ESA**, japonaise **JAXA** et canadienne **ASC**. La Station spatiale internationale est le plus grand des objets artificiels placés en orbite terrestre. Après de nombreuses évolutions, elle s'étend aujourd'hui sur 110 m de longueur, 74 m



de largeur et 30 m de hauteur. Sa masse est d'environ 400 tonnes. La station est occupée en permanence par un équipage international effectuant des expériences scientifiques. L'astronote **Thomas Pesquet** a été le dixième Français à partir dans l'espace en décollant le 17 novembre 2016 à bord de Soyouz MS-03 dont l'équipage a occupé la station pendant six mois.

## ■■ Objectifs

### ■ Ce qu'il faut connaître

- ▷ Les notions de trajectoire, vitesse et accélération d'un point en mouvement par rapport à un repère
- ▷ Le torseur cinématique caractérisant le mouvement d'un solide par rapport à un autre
- ▷ La relation de composition des torseurs cinématiques
- ▷ Le torseur cinématique d'une liaison normalisée.

### ■ Ce qu'il faut savoir faire

- ▷ Proposer une modélisation des liaisons avec une définition précise de leurs caractéristiques géométriques
- ▷ Associer le paramétrage au modèle cinématique retenu
- ▷ Associer à chaque liaison son torseur cinématique
- ▷ Déterminer une trajectoire, un vecteur vitesse ou un vecteur accélération
- ▷ Déterminer le torseur cinématique d'un solide.

# ■ ■ Résumé de cours

## ■ Trajectoire, vitesse et accélération

### □ Trajectoire d'un point

La trajectoire d'un point P dans un repère  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  est l'ensemble des positions successives occupées par ce point au cours du temps dans R. On la note  $T(P/R)$ .

### □ Formule de Bour

Soient un vecteur  $\vec{U}$  quelconque et deux bases  $B_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  et  $B_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ .

$$\left. \frac{d\vec{U}}{dt} \right|_{B_0} = \left. \frac{d\vec{U}}{dt} \right|_{B_1} + \vec{\Omega}(B_1/B_0) \wedge \vec{U}$$

où  $\vec{\Omega}(B_1/B_0)$  est le taux de rotation de  $B_0$  par rapport à  $B_1$ .

### □ Vecteur vitesse

Soit un point P en mouvement dans un repère  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

$$\vec{V}(P/R) = \left. \frac{d\overline{OP}}{dt} \right|_R \quad [\text{m.s}^{-1}]$$

### □ Vecteur accélération

Soit un point P en mouvement dans un repère  $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

$$\vec{a}(P/R) = \left. \frac{d\vec{V}(P/R)}{dt} \right|_R = \left. \frac{d^2\overline{OP}}{dt^2} \right|_R \quad [\text{m.s}^{-2}]$$

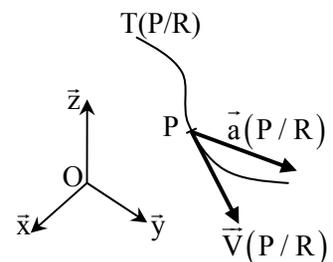
⇒ **Méthode 1.1. Détermination d'un vecteur vitesse ou accélération par application de la formule de Bour**

### Remarques

– Le vecteur vitesse est porté par la tangente à la trajectoire  $T(P/R)$  au point P, et orienté dans le sens du mouvement.

Le vecteur accélération possède une composante tangente à la trajectoire et une composante normale, dirigée vers l'intérieur de la trajectoire lorsqu'elle possède une courbure.

– Pour le calcul d'un vecteur vitesse ou d'un vecteur accélération, aucune base de projection n'est à privilégier. On s'attachera à avoir un résultat concis.



## ■ Torseur cinématique d'un solide indéformable

### □ Définition

Au point de réduction M, le torseur cinématique caractérisant le mouvement du solide i en mouvement par rapport au solide j est défini par :

$$\{V(i/j)\} = \left\{ \begin{array}{c} \bar{\Omega}(i/j) \\ \bar{V}(M,i/j) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} p_{ij} & u_{ij} \\ q_{ij} & v_{ij} \\ r_{ij} & w_{ij} \end{array} \right\}_{\text{base de projection}}$$

$\bar{\Omega}(i/j)$  : résultante du torseur cinématique ou taux de rotation [rad.s<sup>-1</sup>]

$\bar{V}(M,i/j)$  : moment résultant du torseur cinématique ou vitesse linéaire [m.s<sup>-1</sup>]

Remarques

–  $\bar{V}(P/R) \neq \bar{V}(P,S/R)$  et  $\bar{a}(P,S/R) \neq \left. \frac{d\bar{V}(P,S/R)}{dt} \right|_R$  sauf si le point P est fixe dans le repère lié au solide indéformable S.

–  $\bar{a}(M,S_n/S_1) \neq \sum_{i=2}^n \bar{a}(M,S_i/S_{i-1})$  sauf si les termes de Coriolis sont nuls.

### □ Propriétés

Relation de Varignon

$$\bar{V}(A,S/R) = \bar{V}(B,S/R) + \overline{AB} \wedge \bar{\Omega}(S/R)$$

Addition

$$\{V(3/2)\} + \{V(2/1)\} = \left\{ \begin{array}{c} \bar{\Omega}(3/2) + \bar{\Omega}(2/1) \\ \bar{V}(M,3/2) + \bar{V}(M,2/1) \end{array} \right\}$$

Invariants

– Premier invariant : la résultante  $\bar{\Omega}(i/j)$

– Second invariant : l'automoment

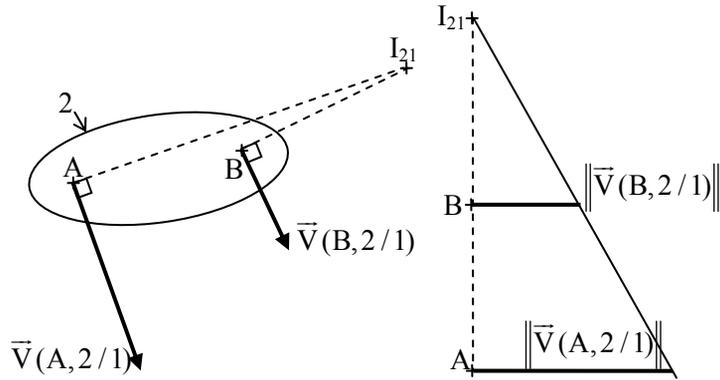
$$\bar{\Omega}(i/j) \cdot \bar{V}(A,i/j) = \bar{\Omega}(i/j) \cdot \bar{V}(B,i/j)$$

Axe instantané de rotation

Ensemble des points pour lesquels la norme de la vitesse  $\bar{V}(M,i/j)$  est nulle, la résultante  $\bar{\Omega}(i/j)$  étant non nulle.

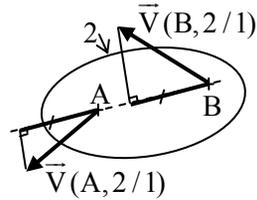
Centre instantané de rotation (C.I.R.) :  $\bar{V}(I_{21}, 2/1) = \vec{0}$

$$\frac{\|\bar{V}(A,2/1)\|}{I_{21}A} = \frac{\|\bar{V}(B,2/1)\|}{I_{21}B} = \|\bar{\Omega}(2/1)\| \quad (\text{voir figure en page suivante})$$



Équiprojectivité du champ des vecteurs vitesse

$$\vec{V}(A, 2/1) \cdot \overline{AB} = \vec{V}(B, 2/1) \cdot \overline{AB}$$



⇒ Méthode 1.2. Applications de cinématique graphique

### □ Mouvements particuliers

Mouvement de translation

$$\left\{ \mathbf{V}(2/1) \right\}_M = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{V}(M, 2/1) \end{array} \right\}_M = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & u_{21} \\ 0 & v_{21} \\ 0 & w_{21} \end{array} \right\}_{\text{Base de projection}}$$

Mouvement de rotation autour d'un point O

$$\left\{ \mathbf{V}(2/1) \right\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \overline{\Omega}(2/1) \\ \vec{0} \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{cc} p_{21} & 0 \\ q_{21} & 0 \\ r_{21} & 0 \end{array} \right\}_{\text{Base de projection}}$$

Mouvement de rotation autour d'un axe (O,  $\vec{u}$ )

$$\left\{ \mathbf{V}(2/1) \right\}_M = \left\{ \begin{array}{c} p_{21} \vec{u} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_M = \left\{ \begin{array}{cc} p_{21} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{(\vec{u}, \dots)} \quad M \in (O, \vec{u})$$

Mouvement hélicoïdal d'axe (O,  $\vec{u}$ )

$$\left\{ \mathbf{V}(2/1) \right\}_M = \left\{ \begin{array}{cc} p_{21} \vec{u} & u_{21} \\ u_{21} \vec{u} & 0 \end{array} \right\}_M = \left\{ \begin{array}{cc} p_{21} & u_{21} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{(\vec{u}, \dots)}$$

$u_{21} = \frac{\lambda p_{21}}{2\pi}$  si l'hélice est à droite  
 $u_{21} = -\frac{\lambda p_{21}}{2\pi}$  si l'hélice est à gauche  
 $\lambda$  : pas du système vis / écrou

Mouvement plan sur plan de normale  $\vec{z}$

$$\{V(2/1)\} = \begin{Bmatrix} r_{21}\vec{z} \\ u_{21}\vec{x} + v_{21}\vec{y} \end{Bmatrix}_M = \begin{Bmatrix} 0 & u_{21} \\ 0 & v_{21} \\ r_{21} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

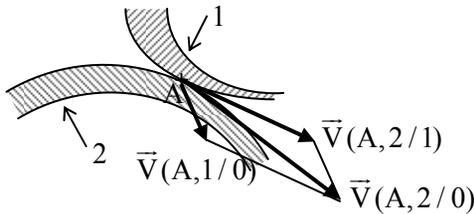
### □ Composition des mouvements

Soient  $n$  solides  $S_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), on montre qu'il y a composition des torseurs cinématiques :

$$\{V(S_n / S_1)\} = \sum_{i=2}^n \{V(S_i / S_{i-1})\}$$

On a alors  $\vec{\Omega}(S_n / S_1) = \sum_{i=2}^n \vec{\Omega}(S_i / S_{i-1})$  et  $\vec{V}(M, S_n / S_1) = \sum_{i=2}^n \vec{V}(M, S_i / S_{i-1})$ .

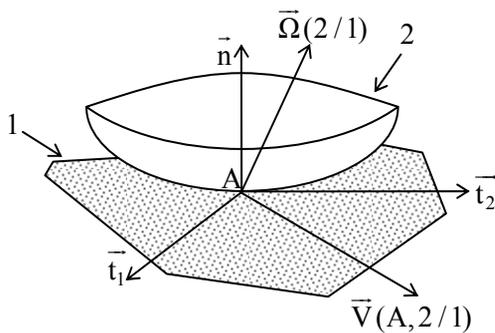
Vitesse de glissement



Vecteur vitesse de glissement  $\vec{V}(A, 2/1)$  : s'il est non nul, il est dans le plan tangent au contact entre les solides 1 et 2.

$$\vec{V}(A, 2/1) = \vec{V}(A, 2/0) - \vec{V}(A, 1/0)$$

Cinématique du contact



$$\vec{\Omega}(2/1) = \vec{\Omega}_p(2/1) + \vec{\Omega}_r(2/1) = p_{21}\vec{n} + q_{21}\vec{t}_1 + r_{21}\vec{t}_2$$

$$\vec{V}(A, 2/1) = v_{21}\vec{t}_1 + w_{21}\vec{t}_2$$

vitesse de rotation de pivotement

$$\|\vec{\Omega}_p(2/1)\| = p_{21}$$

vitesse de rotation de roulement

$$\|\vec{\Omega}_r(2/1)\| = \sqrt{(q_{21})^2 + (r_{21})^2}$$

vitesse linéaire de glissement

$$\|\vec{V}(A, 2/1)\| = \sqrt{(v_{21})^2 + (w_{21})^2}$$

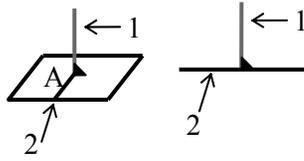
Condition de **non-glissement** :  $\vec{V}(A, 2/1) = \vec{0}$

Condition de **maintien du contact** :  $\vec{V}(A, 2/1) \cdot \vec{n} = 0$

## ■ Liaisons normalisées

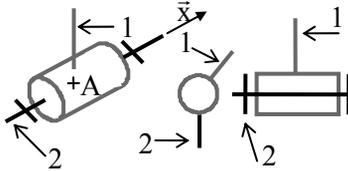
Liaison **encastrement** :

$$\{V(2/1)\}_A = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$



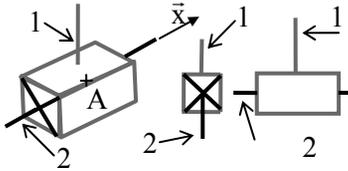
Liaison **pivot d'axe**  $(A, \bar{x})$  :

$$\{V(2/1)\}_A = \begin{Bmatrix} p_{21} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$



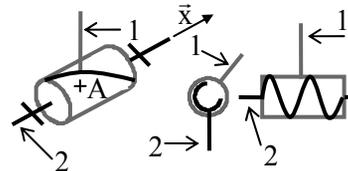
Liaison **glissière** de direction  $\bar{x}$  :

$$\{V(2/1)\}_A = \begin{Bmatrix} 0 & u_{21} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$



Liaison **hélicoïdale** d'axe  $(A, \bar{x})$  :

$$\{V(2/1)\}_A = \begin{Bmatrix} p_{21} & \pm \frac{\lambda p_{21}}{2\pi} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$



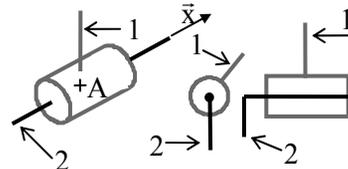
$\lambda$  : pas de l'hélice

$$u_{21} = \frac{\lambda p_{21}}{2\pi} \text{ si hélice à droite}$$

$$u_{21} = -\frac{\lambda p_{21}}{2\pi} \text{ si hélice à gauche}$$

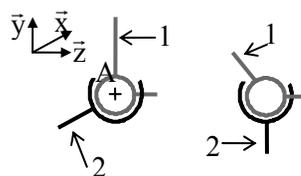
Liaison **pivot glissant** d'axe  $(A, \bar{x})$  :

$$\{V(2/1)\}_A = \begin{Bmatrix} p_{21} & u_{21} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$



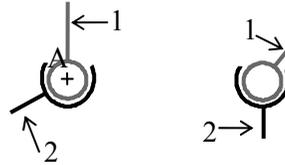
Liaison **sphérique à doigt** d'axes  $(A, \bar{x})$  et  $(A, \bar{z})$  :

$$\{V(2/1)\}_A = \begin{Bmatrix} p_{21} & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{21} & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$



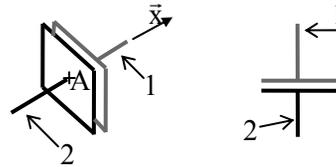
Liaison **sphérique** de centre A :

$$\{V(2/1)\}_A = \begin{Bmatrix} p_{21} & 0 \\ q_{21} & 0 \\ r_{21} & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$



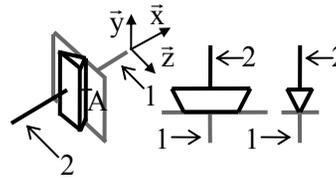
Liaison **appui plan** de normale  $\bar{x}$  :

$$\{V(2/1)\}_A = \begin{Bmatrix} p_{21} & 0 \\ 0 & v_{21} \\ 0 & w_{21} \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$



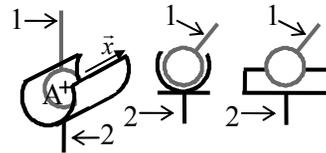
Liaison **linéaire rectiligne** d'axe  $(A, \bar{y})$  et de normale  $\bar{x}$  :

$$\{V(2/1)\}_A = \begin{Bmatrix} p_{21} & 0 \\ q_{21} & v_{21} \\ 0 & w_{21} \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$



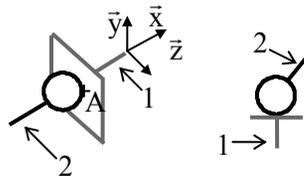
Liaison **sphère cylindre** de centre A et de direction  $\bar{x}$  :

$$\{V(2/1)\}_A = \begin{Bmatrix} p_{21} & u_{21} \\ q_{21} & 0 \\ r_{21} & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$



Liaison **sphère plan** de normale  $(A, \bar{x})$  :

$$\{V(2/1)\}_A = \begin{Bmatrix} p_{21} & 0 \\ q_{21} & v_{21} \\ r_{21} & w_{21} \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$



⇒ **Méthode 1.3. Détermination du torseur cinématique d'un solide**