Leçon 1

Un survol des principaux espaces fonctionnels

Ce n'est là que le début de l'invasion spectaculaire de l'analyse par la topologie que l'on ne peut guère comparer qu'à la marche triomphale de l'idée de groupe à travers toutes les mathématiques.

De même que dans ce dernier cas, il faut bien se persuader que cette introduction de nouvelles structures mathématiques n'a pas eu pour motif un vain désir de généralisation gratuite, mais bien la constatation que ces nouvelles idées conduisaient naturellement à des méthodes d'attaque plus simples, plus souples et plus puissantes pour de nombreux problèmes classiques.

J. Dieudonné.

Il est à peu près impossible de faire quoi que ce soit de sérieux sur des espaces qui ne sont pas complets car il y est impossible de prouver la convergence d'une suite sans en connaître la limite. C'est pourquoi, dans les quelques pages qui suivent, nous nous attacherons à justifier précisément la complétude des espaces considérés. Soulignons que les espaces vectoriels normés complets sont appelés *espaces de Banach*.

1.1 Espace des fonctions bornées sur un ensemble

Etant donné un ensemble X quelconque, nous noterons $\mathcal{F}(X, \mathbf{C})$ l'ensemble des fonctions définies sur X et à valeurs dans $\mathbf{C}$. Cet ensemble peut clairement être muni d'une structure de $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\big(\mathcal{F}(X, \mathbf{C}), +, \cdot\big)$ où les lois $+$ et $\cdot$ sont définies par :

$$\forall f \in \mathcal{F}(X, \mathbf{C}),\ \forall g \in \mathcal{F}(X, \mathbf{C}) : (f+g)(x) := f(x) + g(x),\ \ \forall x \in X$$
$$\forall f \in \mathcal{F}(X, \mathbf{C}),\ \forall \lambda \in \mathbf{C} : (\lambda \cdot f)(x) := \lambda f(x),\ \ \forall x \in X.$$

Le premier sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(X, \mathbf{C})$ sur lequel il est agréable de travailler est celui des fonctions bornées qui est noté $L^\infty(X, \mathbf{C})$:

$$L^\infty(X, \mathbf{C}) := \{f \in \mathcal{F}(X, \mathbf{C}) :\ \ \sup_{x \in X} |f(x)| < +\infty\}.$$

Il peut être muni d'une norme notée $\|\ \|_\infty$ et définie par

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Celle-ci est appelée *norme de la convergence uniforme* sur X car il est clair que $\|f - f_n\|_\infty \to 0$ si et seulement si la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur X. C'est un fait remarquable que cette norme soit complète.

Théorème 1.1.1 *$\big(L^\infty(X, \mathbf{C}), \|\ \|_\infty\big)$ est un espace de Banach.*

□ Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $\big(L^\infty(X, \mathbf{C}), \|\ \|_\infty\big)$. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe un entier n_0 tel que $\|f_m - f_n\|_\infty < \epsilon$ pour $m \geq n \geq n_0$. Autrement dit :

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N} :\ \ m \geq n \geq n_0 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon,\ \forall x \in X. \quad (1.1.1)$$

On voit donc que $(f_n(x))_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbf{C}$ pour tout $x \in X$ ce qui permet de poser $f(x) := \lim_n f_n(x)$. En faisant tendre m vers l'infini dans (1.1.1), on voit simultanément que f est bornée sur X et que $\|f - f_n\|_\infty \leq \epsilon$ pour $n \geq n_0$. Il existe donc $f \in L^\infty(X, \mathbf{C})$ telle que $\lim_n \|f - f_n\|_\infty = 0$. □

Notons que lorsque $X = \mathbf{N}$ (ou $X = \mathbf{Z}$) l'espace $L^\infty(X, \mathbf{C})$ est celui des suites bornées de nombres complexes qui, muni de $\|\ \|_\infty$, est donc un espace de Banach. Cet espace est habituellement noté l^∞ :

$$l^\infty := \{(x_n)_n \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}} :\ \ \sup_{n \in \mathbf{N}} |x_n| < +\infty\}.$$

On peut également considérer l'espace des suites de limite nulle, c'est un sous-espace de l^∞ que l'on note c_0.

$$c_0 := \{(x_n)_n \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}} : \ \lim_n |x_n| = 0\}.$$

Le principe d'interversion des limites pour les suites de fonctions qui convergent uniformément montre que c_0 est fermé dans $\big(l^\infty, \| \ \|_\infty\big)$. Nous synthétisons ces remarques par l'énoncé suivant.

Théorème 1.1.2 $\big(l^\infty, \| \ \|_\infty\big)$ *et* $\big(c_0, \| \ \|_\infty\big)$ *sont des espaces de Banach.*

Exercice 1.1.3 *Soit* c *le sous-espace de* $\big(l^\infty, \| \ \|_\infty\big)$ *constitué des suites convergentes. Montrer que* $\big(c, \| \ \|_\infty\big)$ *est un espace de Banach.*

La plupart des espaces fonctionnels sont obtenus en spécialisant X, soit en le munissant d'une topologie, soit en le munissant d'une mesure. Nous allons explorer ces possibilités.

1.2 Espaces de fonctions définies sur un espace topologique

1.2.1 Espaces de fonctions continues

Sauf mention explicite du contraire, tous les espaces topologiques que nous considérerons seront séparés. Lorsque X est muni d'une topologie, le concept de continuité pour les fonctions définies sur X prend sens. On peut alors considérer deux nouveaux sous-espaces de $\mathcal{F}(X, \mathbf{C})$:

$$C(X) := \{f \in \mathcal{F}(X, \mathbf{C}) : \ f \text{ est continue sur } X\}$$
$$C_b(X) := \{f \in L^\infty(X, \mathbf{C}) : \ f \text{ est continue sur } X\}.$$

On sait que la continuité est préservée par convergence uniforme. Autrement dit, $C_b(X)$ est fermé dans $\big(L^\infty(X, \mathbf{C}), \| \ \|_\infty\big)$ et le résultat suivant découle donc du théorème 1.1.1.

Théorème 1.2.1 $\big(C_b(X), \| \ \|_\infty\big)$ *est un espace de Banach.*

On peut considérer d'autres sous-espaces de $C(X)$ définis par des conditions de comportement à l'infini. Précisons pour cela un peu de vocabulaire.

Définition 1.2.2 *On dit que* $f \in \mathcal{F}(X, \mathbf{C})$ tend vers 0 à l'infini *si pour tout* $\epsilon > 0$ *il existe un compact* $K \subset X$ *tel que* $|f| < \epsilon$ *sur* $X \setminus K$. *On note dans ce cas* $\lim_\infty |f| = 0$.

Le support d'une fonction $f \in \mathcal{F}(X, \mathbf{C})$, *noté* $Supp(f)$, *est l'adhérence du sous-ensemble de* X *où cette fonction est non nulle.*

Les espaces $C_0(X)$ et $C_c(X)$ sont les sous-espaces de $C(X)$ respectivement définis par la condition d'annulation à l'infini et celle de compacité du support.

$$C_0(X) := \{f \in C(X) : \ \lim_\infty |f| = 0\}$$
$$C_c(X) := \{f \in C(X) : \ \mathrm{Supp}(f) \text{ est compact dans } X\}.$$

Les inclusions suivantes sont évidentes et deviennent des égalités lorsque X est compact :

$$C_c(X) \subset C_0(X) \subset C_b(X) \subset C(X).$$

En général ces sous-espaces ne sont pas fermés dans $\big(C_b(X), \| \, \|_\infty\big)$.

Il n'est pas évident du tout de construire des fonctions continues sur un espace topologique quelconque. Le lemme d'Urysohn permet de surmonter cette difficulté dans les espaces topologiques *normaux*, c'est-à-dire dans les espaces satisfaisant l'une des deux propriétés dont le Lemme 1.2.3 ci-dessous stipule l'équivalence. Rappelons qu'il est facile de montrer que les espaces compacts sont normaux.

Lemme 1.2.3 (Urysohn) *Dans un espace topologique X les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

1) *Quels que soient les sous-ensembles fermés disjoints F_1 et F_2 il existe des ouverts disjoints U_1 et U_2 tels que $F_1 \subset U_1$ et $F_2 \subset U_2$.*
2) *Quels que soient les sous-ensembles fermés disjoints F_1 et F_2 il existe une fonction continue $f : X \to [0,1]$ nulle sur F_1 et constante égale à 1 sur F_2.*

La fonction distance étant continue, il est beaucoup plus facile de construire des fonctions continues aux propriétés variées sur un espace métrique (X, d) que sur un espace topologique arbitraire.

Par exemple, si χ est une fonction plateau supportée par $[-2, 2]$ et constante égale à 1 sur $[-1, 1]$, alors la fonction $\chi_\epsilon(x) := \chi\big(\frac{d(x,x_0)}{\epsilon}\big)$ est continue sur X, identiquement égale à 1 sur $B(x_0, \epsilon)$ et nulle en dehors de $B(x_0, 2\epsilon)$. Ces possibilités permettent d'établir l'important résultat suivant dont la démonstration fait l'objet de l'exercice 1.2.6.

Théorème 1.2.4 *Si (K, d) est un espace métrique compact alors l'espace de Banach $\big(C(K), \| \, \|_\infty\big)$ est séparable.*

Rappelons ici ce que l'on entend par espace séparable, cette notion jouera très souvent un rôle important. Signalons que les espaces de Banach séparables sont plus faciles à étudier que les espaces de Banach arbitraires, ceci sera amplement illustré dans la suite de ce cours.

Définition 1.2.5 *Un espace topologique est dit* séparable *si il contient une partie dénombrable et dense.*

Exercice 1.2.6 *Soit (K,d) un espace métrique compact.*

1) Pour tout $f \in C(K)$ et tout $\eta > 0$ on pose

$$O(f,\eta) := \sup_{d(x,y)\leq \eta} |f(x) - f(y)|.$$

Montrer que $\lim_{\eta\to 0} O(f,\eta) = 0$.

2) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, justifier l'existence d'une collection finie de points $\{a_{n,1},\cdots,a_{n,N_n}\}$ telle que

$$K = \cup_{i=1}^{N_n} B\big(a_{n,i}, \tfrac{1}{2n}\big)$$

puis celle de fonctions $\chi_{n,i} \in C(K)$ telles que :

$0 \leq \chi_{n,i} \leq 1,\ \chi_{n,i} = 1$ *sur* $B\big(a_{n,i}, \frac{1}{2n}\big)$ *et* $Supp\big(\chi_{n,i}\big) \subset B\big(a_{n,i}, \frac{1}{n}\big)$.

3) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, tout $1 \leq i \leq N_n$ et pour tout $f \in C(K)$ on pose :

$$\sigma_{n,i} := \frac{\chi_{n,i}}{\sum_{i=1}^{N_n} \chi_{n,i}}.$$

puis

$$f_n := \textstyle\sum_{i=1}^{N_n} f(a_{n,i})\ \sigma_{n,i}.$$

Montrer que $f_n \in C(K)$ puis que $\|f - f_n\|_\infty \leq O(f, \frac{1}{n})$.

4) Montrer que l'ensemble $\cup_{n\in\mathbf{N}}\{\sigma_{n,i},\ 1 \leq i \leq N_n\}$ engendre un espace vectoriel dense dans $\big(C(K), \|\ \|_\infty\big)$ puis en déduire que $\big(C(K), \|\ \|_\infty\big)$ est séparable.

On observera que les fonctions $\sigma_{n,i}$ construites dans l'exercice ci-dessus sont continues, prennent leurs valeurs dans $[0,1]$ et vérifient $\sum_{i=1}^{N_n} \sigma_{n,i} = 1$. De plus, chaque fonction $\sigma_{n,i}$ est supportée par $B\big(a_{n,i}, \frac{1}{n}\big)$. On résume ceci en disant que $(\sigma_{n,i})_{1\leq i\leq N_n}$ est une *partition continue de l'unité* subordonnée au recouvrement de K donné par $K = \cup_{1\leq i\leq N_n} B\big(a_{n,i}, \frac{1}{n}\big)$.

Il n'est pas possible de définir une norme sur $C(X)$ qui rende compte de la convergence uniforme locale. On peut cependant, lorsque X possède une suite exhaustive de compacts, munir $C(X)$ d'une structure d'espace métrique complet au sein duquel la convergence est exactement la convergence uniforme locale. De plus les opérations d'espace vectoriel sont continues pour cette distance. Cet espace peut être considéré comme un prototype d'espaces plus généraux appellés *espaces de Fréchet*. Ceci fait l'objet de l'exercice 1.2.8.

Posons au préalable quelques définitions.

Définition 1.2.7 *Une* suite exhaustive de compacts *d'un espace topologique X est une suite de compacts $(K_n)_n$ telle que $K_n \subset int\big(K_{n+1}\big)$ et $\cup_{n\in\mathbf{N}} K_n = X$.*

Rappelons qu'un espace métrique localement compact et séparable possède une suite exhaustive de compacts ; c'est un exercice de topologie élémentaire que de vérifier cette assertion.

Exercice 1.2.8 *Soit X un espace topologique muni d'une suite exhaustive de compacts $(K_k)_k$. Pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $f, g \in C(X)$ on pose :*

$$p_k(f) := \|f 1_{K_k}\|_\infty \ \text{et} \ d(f,g) := \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \min\big(1, p_k(f-g)\big).$$

1) Soient $f_n, f \in C(X)$. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes
i. f_n converge uniformément vers f sur tout compact
ii. f_n converge uniformément vers f sur K_k pour tout k
iii. f_n converge uniformément localement vers f.
2) Montrer que d est une distance.
3) Montrer que $d(f_n, f) \to 0$ si et seulement si f_n converge uniformément localement vers f.
4) Montrer que $\big(C(X), d\big)$ est un espace métrique complet.

Nous détaillons ici un point de la solution de l'exercice 1.2.8 car l'argument utilisé est d'emploi fréquent.

□ Montrons que :

$$\text{si } \lim_n p_k(f_n) = 0 \text{ pour tout } k \text{ alors } \lim_n d(f_n, 0) = 0.$$

Pour tout $N \in \mathbf{N}$ on a :

$$d(f_n, 0) = \sum_{k=0}^{N} 2^{-k} \min\big(1, p_k(f_n)\big) + \sum_{k>N} 2^{-k} \min\big(1, p_k(f_n)\big) \leq \sum_{k=0}^{N} 2^{-k} \min\big(1, p_k(f_n)\big) + 2^{-N}.$$

Il s'ensuit que $0 \leq \limsup_n d(f_n, 0) \leq 2^{-N}$ pour tout $N \in \mathbf{N}$ et donc que $\lim_n d(f_n, 0) = 0$. □

1.2.2 Espaces de fonctions définies sur une partie de $\mathbf{R}^k$

Lorsque X est contenu dans $\mathbf{R}^k$ (ou bien $\mathbf{C}^k$) on peut prendre en compte des propriétés de régularité des fonctions plus fortes que la seule continuité et définir des sous-espaces de $C(X)$. Nous allons voir dans quelle mesure ceux-ci peuvent être munis de structures utiles. Nous fixons ici une norme $\| \ \|$ sur $\mathbf{R}^k$ (ou $\mathbf{C}^k$), par exemple la norme euclidienne.

Les fonctions Hölder-continues constituent un premier espace de fonctions qui est strictement contenu dans celui des fonctions continues.

Définition 1.2.9 *Une fonction f est dite α-Hölderienne* $(0 < \alpha)$ *sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^k$ si il existe une constante C telle que*

$$|f(x) - f(y)| \leq C\|x - y\|^\alpha \text{ pour tout } x, y \in \Omega$$

et si f est bornée sur Ω (lorsque Ω est borné cette seconde condition est automatiquement satisfaite).

Les fonctions α- Hölderiennes sont parfois appelées α-Lipschitziennes. Ceci explique la notation $Lip_\alpha\big(\Omega\big)$ pour l'ensemble des fonctions α-Hölderiennes sur Ω ;

$$Lip_\alpha\big(\Omega\big) := \{f \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbf{C}) : \ \sup_{x \neq y \in \Omega} \tfrac{|f(x)-f(y)|}{\|x-y\|^\alpha} + \sup_{x \in \Omega} |f(x)| < +\infty\}.$$

Cet espace n'a d'intérêt que lorsque $0 < \alpha \leq 1$ car il est réduit aux seules constantes lorsque $\alpha > 1$ et ω connexe (les fonctions sont alors différentiables et de différentielle nulle). On munit $Lip_\alpha\big(\Omega\big)$ de la norme

$$\|f\|_\alpha := \|f\|_\infty + \ Sup_{x \neq y \in \Omega} \tfrac{|f(x)-f(y)|}{\|x-y\|^\alpha}.$$

Théorème 1.2.10 $\big(Lip_\alpha\big(\Omega\big), \|f\|_\alpha\big)$ *est un espace de Banach.*

L'exercice suivant fournit la preuve de ce théorème ainsi que quelques propriétés des fonctions Hölderiennes.

Exercice 1.2.11 *Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^k$.*

1) Montrer que $\big(Lip_\alpha\big(\Omega\big), \|f\|_\alpha\big)$ est un espace de Banach.

2) Montrer que tout $f \in Lip_\alpha\big(\Omega\big)$ est uniformément continue sur Ω et se prolonge continûment à $\overline{\Omega}$.

Les fonctions de classe $\mathcal{C}^m$ sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^k$ forment un sous-espace de $C(\Omega)$ noté $\mathcal{C}^m(\Omega)$. À l'instar de ce que l'on a fait sur $C(X)$ pour décrire la convergence uniforme locale (voir l'exercice 1.2.8), on peut munir $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ d'une distance complète induisant la topologie de la convergence uniforme locale des fonctions et de toutes leurs dérivées.

Rappelons que la dérivée partielle $D^\alpha f$ de $f \in \mathcal{C}^m(\Omega)$ est définie par

$$D^\alpha f := \big(\frac{\partial}{\partial x_1}\big)^{\alpha_1} \cdots \big(\frac{\partial}{\partial x_k}\big)^{\alpha_k} f$$

pour tout multi-indice $\alpha := (\alpha_1, \cdots, \alpha_k)$ tel que $|\alpha| := \sum_{j=1}^k |\alpha_j| \leq m$.

Exercice 1.2.12 *Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^p$ et $(K_k)_k$ une suite exhaustive de compacts de Ω. Pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ on pose :*

$$p_k(f) := \sup_{|\alpha| \leq k} \|1_{K_k} D^\alpha f\|_\infty \text{ et } d(f,g) = \sum_{k=0}^\infty 2^{-k} \min\big(1, p_k(f-g)\big).$$

1) Montrer que $\big(\mathcal{C}^\infty(\Omega), d\big)$ est un espace métrique complet.
2) Montrer que $d(f_n, g) \to 0$ si et seulement si $D^\alpha f_n$ converge localement uniformément vers $D^\alpha g$ pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^p$.

Le sous-espace $\mathcal{C}^m(\overline{\Omega})$ de $\mathcal{C}^m(\Omega)$ est constitué des fonctions $f \in \mathcal{C}^m(\Omega)$ dont toutes les dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à m se prolongent continûment à $\overline{\Omega}$. On peut aussi considérer le sous-espace $\mathcal{C}^{m,\epsilon}(\overline{\Omega})$ de $\mathcal{C}^m(\overline{\Omega})$ obtenu en exigeant que $D^\alpha f \in Lip_\epsilon(\overline{\Omega})$ pour $|\alpha| = m$.

$$\mathcal{C}^m(\overline{\Omega}) := \{f \in \mathcal{C}^m(\Omega) : \ D^\alpha f \in C(\overline{\Omega}), \ \forall |\alpha| \leq m\}$$
$$\mathcal{C}^{m,\epsilon}(\overline{\Omega}) := \{f \in \mathcal{C}^m(\overline{\Omega}) : \ D^\alpha f \in Lip_\epsilon(\overline{\Omega}), \ \forall |\alpha| = m\}.$$

Lorsque Ω est borné, on peut munir ces espaces des normes respectives

$$\|f\|_m := \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_\infty$$
$$\|f\|_{m,\epsilon} := \sum_{0 \leq |\alpha| < m} \|D^\alpha f\|_\infty + \sum_{|\alpha| = m} \|D^\alpha f\|_\epsilon$$

Théorème 1.2.13 *Les espaces $\big(\mathcal{C}^m(\overline{\Omega}), \|\ \|_m\big)$ et $\big(\mathcal{C}^{m,\epsilon}(\overline{\Omega}), \|\ \|_{m,\epsilon}\big)$ sont des espaces de Banach.*

Lorsque Ω est un ouvert du plan complexe, on peut considérer l'espace $\mathcal{O}(\Omega)$ des fonctions holomorphes sur Ω. C'est un sous-espace de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$. L'espace $H^\infty(\Omega)$ des fonctions holomorphes bornées sur Ω est défini par

$$H^\infty(\Omega) := L^\infty(\Omega) \cap \mathcal{O}(\Omega).$$

On sait que l'holomorphie est préservée par convergence uniforme ou, autrement dit, que $H^\infty(\Omega)$ est fermé dans $\big(L^\infty(\Omega, \mathbf{C}), \|\ \|_\infty\big)$. Compte tenu du théorème 1.1.1 on a donc le résultat suivant.

Théorème 1.2.14 $\big(H^\infty(\Omega), \|\ \|_\infty\big)$ *est un espace de Banach.*