

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Un survol des principaux espaces fonctionnels</b>	<b>1</b>
1.1	Espace des fonctions bornées sur un ensemble . . . . .	2
1.2	Espaces de fonctions définies sur un espace topologique . . . . .	3
1.2.1	Espaces de fonctions continues . . . . .	3
1.2.2	Espaces de fonctions définies sur une partie de $\mathbf{R}^k$ . . . . .	6
1.3	Espaces de fonctions mesurées . . . . .	9
1.3.1	Les espaces $L^p$ . . . . .	9
1.3.2	L'espace de Hilbert $L^2$ . . . . .	11
1.4	Espaces d'applications linéaires . . . . .	13
1.4.1	Dual topologique d'un espace vectoriel normé . . . . .	13
1.4.2	Applications linéaires continues entre espaces normés . . . . .	15
1.4.3	Le théorème de Hahn-Banach dans le cas des espaces séparables . . . . .	17
1.4.4	Espaces duaux des espaces $C(K)$ et $L^p$ . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Les espaces <math>C(K)</math></b>	<b>25</b>
2.1	Questions de compacité . . . . .	25
2.1.1	Équicontinuité, procédé diagonal . . . . .	26
2.1.2	Le théorème d'Ascoli . . . . .	29
2.1.3	Le théorème de Banach-Alaoglu . . . . .	34
2.2	Questions d'approximation et de densité . . . . .	37
2.2.1	Le théorème de Weierstrass . . . . .	37
2.2.2	Le théorème de Stone-Weierstrass . . . . .	39
2.3	L'universalité de $C(K)$ . . . . .	43
2.3.1	Plongements d'espaces de Banach dans $C(K)$ et théorème de Banach-Mazur . . . . .	43
2.3.2	Vers le théorème de Gelfand-Naimark . . . . .	47

<b>3</b>	<b>Méthodes hilbertiennes</b>	<b>51</b>
3.1	Structure hermitienne . . . . .	51
3.1.1	Formes sesquilinéaires et hermitiennes . . . . .	51
3.1.2	Espaces de Hilbert . . . . .	53
3.1.3	Orthogonalité . . . . .	54
3.2	Le Théorème de projection . . . . .	55
3.2.1	Projection de meilleure approximation . . . . .	56
3.2.2	Supplémentaire orthogonal . . . . .	57
3.3	Propriétés essentielles des espaces de Hilbert . . . . .	60
3.3.1	Isométrie avec le dual topologique, opérateur adjoint . . . . .	60
3.3.2	Un critère de densité . . . . .	65
3.3.3	Compacité faible . . . . .	65
3.3.4	Bases hilbertiennes, séries de Fourier . . . . .	69
3.4	Analyse spectrale des opérateurs . . . . .	74
3.4.1	Inversibilité, spectre et valeurs propres d'un opérateur . . . . .	74
3.4.2	Opérateurs compacts . . . . .	76
3.4.3	Réduction des opérateurs normaux compacts . . . . .	78
3.4.4	L'alternative de Fredholm . . . . .	82
<b>4</b>	<b>Méthodes banachiques</b>	<b>87</b>
4.1	Propriétés essentielles des espaces métriques complets . . . . .	88
4.1.1	Le théorème de Baire . . . . .	88
4.1.2	Quelques outils . . . . .	90
4.2	Linéarité et continuité . . . . .	93
4.2.1	Le théorème de Banach-Steinhaus . . . . .	94
4.2.2	Le théorème de l'application ouverte . . . . .	97
4.2.3	Le théorème du graphe fermé . . . . .	105
4.3	Bases dans les espaces de Banach . . . . .	106
4.3.1	Bases de Hamel . . . . .	106
4.3.2	Bases de Schauder . . . . .	109
4.4	Prolongement des formes linéaires . . . . .	112
4.4.1	Le théorème de Hahn-Banach . . . . .	112
4.4.2	Un critère de densité . . . . .	118
<b>5</b>	<b>Méthodes géométriques</b>	<b>123</b>
5.1	Les convexes dans un espace normé . . . . .	124
5.1.1	Formes linéaires et fonctions convexes . . . . .	124
5.1.2	Jauges et semi-normes . . . . .	127
5.1.3	Le théorème de séparation de Hahn-Banach . . . . .	130
5.1.4	Points extrémaux . . . . .	134

---

5.1.5	Théorème de Banach-Stone; existence d'isométries et points extrémaux . . . . .	138
5.1.6	Les théorèmes de Krein-Milman et de Choquet . . . . .	139
5.2	Espaces localement convexes (e.l.c) . . . . .	144
5.2.1	Topologie induite par une famille de semi-normes . . . . .	144
5.2.2	Extension aux e.l.c des théorèmes de Hahn-Banach, de Krein-Milman et de Choquet . . . . .	146
5.2.3	Topologies faibles . . . . .	148
5.2.4	Dualité en topologie faible . . . . .	151
5.2.5	Bornés faibles et bornés forts, fermés faibles et fermés forts . . . . .	153
5.2.6	Le lemme de Goldstine . . . . .	156
5.2.7	Compacité faible dans un espace dual . . . . .	157
5.3	Espaces réflexifs . . . . .	158
5.3.1	Définition et exemples . . . . .	158
5.3.2	Réflexivité et compacité faible de la boule unité . . . . .	159
5.3.3	Réflexivité et convexité uniforme . . . . .	160
5.3.4	Réflexivité et compacité séquentielle faible . . . . .	162
5.3.5	Le critère de réflexivité de James . . . . .	164
<b>Solutions des exercices</b>		<b>169</b>
S.1	Exercices de la première leçon . . . . .	169
S.2	Exercices de la deuxième leçon . . . . .	176
S.3	Exercices de la troisième leçon . . . . .	189
S.4	Exercices sur la quatrième leçon . . . . .	209
S.5	Exercices sur la cinquième leçon . . . . .	230
<b>Table des notations</b>		<b>243</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>245</b>
<b>Index</b>		<b>247</b>