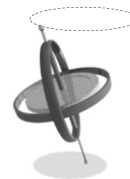


CHAPITRE 1 : NOTION DE MOMENTS

La résonance magnétique nucléaire (RMN) repose sur la mise en précession de noyaux atomiques. Il est donc classique de comparer ces noyaux à une toupie.



La description d'un mouvement de précession fait appel à la notion de moments. Les moments en physique sont propres au mouvement de rotation. Ce premier chapitre présente 3 sortes de moments utilisés en mécanique du solide et leur application au mouvement de précession d'une toupie. La comparaison avec la précession des noyaux sera faite à la fin du chapitre 2.

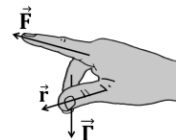
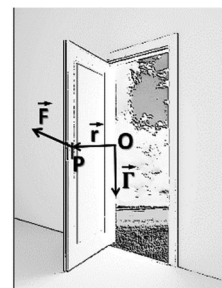
MOMENT D'UNE FORCE : $\vec{\Gamma}$

Le moment $\vec{\Gamma}$ d'une force \vec{F} appliquée à un point P d'un objet susceptible de tourner autour d'un point O , s'exprime par :

$$\vec{\Gamma} = \vec{r} \wedge \vec{F} \quad (\text{unité SI : } N \cdot m) \quad \text{avec : } \vec{r} = \overrightarrow{OP}$$

L'opérateur \wedge est nommé « produit vectoriel ». Celui-ci donne au vecteur $\vec{\Gamma}$ les propriétés suivantes :

- $\vec{\Gamma}$ est perpendiculaire au plan contenant les 2 vecteurs \vec{r} et \vec{F} .
- $\vec{\Gamma}$ a pour sens celui indiqué par la règle des « 3 doigts de la main droite » avec \vec{r} : pouce, \vec{F} : index, et $\vec{\Gamma}$: majeur. Autrement dit, le trièdre $(\vec{r}, \vec{F}, \vec{\Gamma})$ est direct.
- $\vec{\Gamma}$ a pour norme : $\Gamma = r F \left| \sin(\widehat{\vec{r}, \vec{F}}) \right|$, avec r et F les normes respectives des vecteurs \vec{r} et \vec{F} .



La norme du moment de force est proportionnelle à l'intensité de la force et à la distance de son point d'application par rapport au pivot de rotation. Elle est maximale si \vec{F} est perpendiculaire à \vec{r} , et nulle si \vec{r} et \vec{F} sont alignés.

Remarque : Le produit vectoriel n'est pas commutatif, mais antisymétrique : $\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$, quels que soient les vecteurs \vec{A} et \vec{B} .

MOMENT D'INERTIE : \mathcal{M}

Le moment d'inertie \mathcal{M} d'un objet est un scalaire dont la valeur représente la résistance qu'offre un objet au changement de vitesse de rotation.

Pour un objet quasi-ponctuel :

$$\mathcal{M}_{point} = m_{point} r^2 \quad (\text{unité SI : } kg \cdot m^2)$$



Avec m : masse de l'objet, et r le rayon de giration.

Le moment d'inertie d'un objet quelconque s'obtient par intégration des moments d'inertie de tous les points matériels composant l'objet.

Pour un disque, on trouverait : $\mathcal{M}_{disque} = \frac{m_{disque} r_{disque}^2}{2}$



MOMENT ANGULAIRE : \vec{L}

Le moment angulaire \vec{L} , appelé également moment cinétique, correspond au « moment de la quantité de mouvement » ou à « l'élan de rotation » d'un objet.

Pour un objet quasi-ponctuel animé d'un mouvement circulaire de rayon \vec{r} , le moment angulaire est donné par :

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} \quad (\text{unité SI : } kg \cdot m^2 \cdot s^{-1})$$

avec \vec{p} quantité de mouvement ($\vec{p} = m\vec{v}$) et \vec{v} vitesse linéaire tangentielle de rotation (unité SI : $m \cdot s^{-1}$) de l'objet. D'où :

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = m \vec{r} \wedge \vec{v}$$

Le moment angulaire est donc dirigé selon la direction de l'axe de rotation (à la fois perpendiculaire à \vec{r} et à \vec{v}).

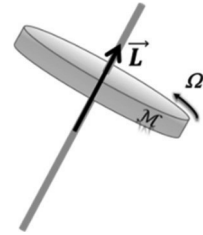
Pour une trajectoire circulaire, \vec{v} est perpendiculaire à \vec{r} , d'où $|\sin(\widehat{\vec{r}, \vec{v}})| = 1$, et donc :

$$L = m r v$$

Avec Ω vitesse angulaire ($\Omega = \frac{v}{r}$, unité SI : $rad \cdot s^{-1}$) la norme du moment angulaire devient :

$$L = m r^2 \Omega = \mathcal{M} \Omega$$

Cette relation peut être généralisée à un *objet quelconque* en rotation. En définissant $\vec{\Omega}$ comme le *vecteur vitesse angulaire* de norme Ω et de direction celle de l'axe de rotation, et avec \mathcal{M} le moment d'inertie de cet objet, on a :



$$\vec{L} = \mathcal{M}\vec{\Omega}$$

Remarque : On peut noter l'analogie avec l'expression de la quantité de mouvement pour le mouvement rectiligne : $\vec{p} = m\vec{v}$.

Variation de moment angulaire

D'après le principe fondamental de la dynamique (Newton 1643-1727) appliqué au mouvement de rotation, la dérivée par rapport au temps du moment angulaire est égale à la somme des moments des forces :

$$\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Remarques : L'analogie avec le mouvement rectiligne est là aussi évidente, où $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ (i.e. $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$, avec \vec{a} : accélération linéaire).

Par ailleurs, en absence de force extérieure, le moment angulaire (élan de rotation) se conserve ($\Gamma = 0 \Leftrightarrow \frac{dL}{dt} = 0$).



APPLICATION AU MOUVEMENT DE PRESSION

Considérons une toupie constituée d'un disque et d'une tige centrale dont l'extrémité sert de pivot.

Deux situations distinctes se présentent :

- *En l'absence de rotation du disque* (i.e. lorsque le moment angulaire est nul) la force de pesanteur fait tomber la toupie.
- Par contre, *si le disque tourne sur lui-même en rotation rapide* (vitesse de rotation $\vec{\Omega}$) la toupie décrit un **mouvement dit « de précession »** : l'axe de la toupie décrit lentement l'enveloppe d'un cône.

Chapitre 1 : Notion de moments

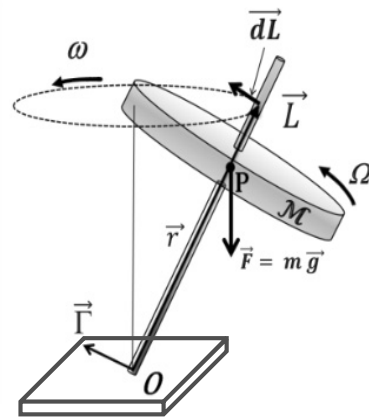
Dans ce deuxième cas, le disque possède un moment angulaire non nul ($\vec{L} = \mathcal{M}\vec{\Omega}$) dirigée selon l'axe de rotation de la toupie.

D'après le principe fondamental de la dynamique :

$$\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Par ailleurs, du fait de la force de pesanteur s'exerçant sur le disque : $\vec{\Gamma} = \vec{r} \wedge \vec{F}$, avec : $\vec{F} = m\vec{g}$ ⁽¹⁾ d'où :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$



$\frac{d\vec{L}}{dt}$ est constamment perpendiculaire à l'axe \vec{r} (donc à \vec{L}) et perpendiculaire à la force s'exerçant sur le système (force de pesanteur verticale).

L'extrémité du vecteur \vec{L} décrit donc un mouvement de rotation horizontal.

Remarque : Soit \vec{x} le vecteur unitaire (i.e. de norme égale à 1) dirigé selon l'axe de la toupie. Puisque \vec{L} et \vec{r} sont dirigés selon cet axe, on a :

$$\vec{L} = L\vec{x} \quad \text{et} \quad \vec{r} = r\vec{x}$$

En posant $k = \frac{mr}{L} = \frac{mr}{\mathcal{M}\Omega}$, l'équation : $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge m\vec{g}$ peut être mise sous la forme :

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = k\vec{x} \wedge \vec{g}$$

Nous verrons ultérieurement que la variation des moments magnétiques de noyaux placés dans un champ magnétique s'exprime de manière similaire.

On montrerait facilement (cf. Annexe 1 page 39) qu'en l'absence de force de frottement, la **vitesse angulaire de précession** ω est constante, et est proportionnelle à la valeur du champ de force appliqué (ici le champ de force gravitationnelle).

$$\omega = k g \quad (\text{unité SI : } \text{rad} \cdot \text{s}^{-1})$$

¹ Rappel : \vec{g} est le vecteur accélération gravitationnelle. Sur terre, $g \approx 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.

POINTS ESSENTIELS DU CHAPITRE 1

- Le moment d'une force s'écrit : $\vec{\Gamma} = \vec{r} \wedge \vec{F}$
 - $\vec{\Gamma}$ est perpendiculaire à la direction de la force.
- Le moment angulaire, ou moment cinétique, d'un objet en rotation a pour expression : $\vec{L} = m \vec{r} \wedge \vec{v}$
 - \vec{L} est dirigé selon la direction de l'axe de rotation.
- D'après le principe fondamental de la dynamique : $\vec{\Gamma} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F}$
 - Pour un objet présentant un moment angulaire non négligeable, l'action d'un moment de force se traduit par une variation du moment angulaire perpendiculaire à la direction de la force.
 - Sous l'action d'un moment de force, le moment angulaire tourne selon un mouvement de précession, autour d'un axe principal dirigé dans la direction de la force.
 - La vitesse angulaire de précession ω est proportionnelle à la valeur du champ de force appliqué.

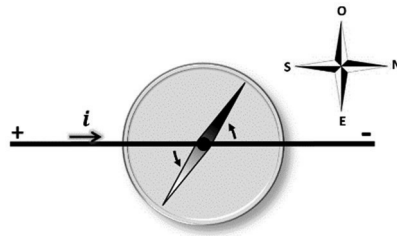
CHAPITRE 2 : CHAMPS MAGNETIQUES STATIQUES ET INTERACTIONS

Dans ce chapitre, sont présentées différentes sources de champ magnétique statique, puis l'interaction d'un champ magnétique statique avec différents éléments.

SOURCES DE CHAMP MAGNETIQUE STATIQUE

EXPERIENCE D'OERSTED

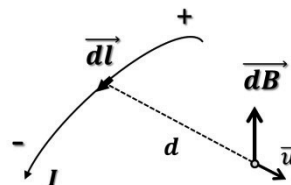
En 1819, le danois **Hans Christian Oersted**, pharmacien, médecin puis physicien, découvrit qu'un fil conducteur parcouru par un courant électrique continu agit sur l'aiguille aimantée d'une boussole placée à proximité, en l'orientant perpendiculairement à la direction du courant.



Cette expérience montra que le déplacement de charges électriques produit, à proximité, un champ magnétique. Elle marqua le début des travaux sur l'électromagnétisme.

LOI DE BIOT ET SAVART

L'année suivante, en 1820, deux physiciens français **Jean-Baptiste Biot et Félix Savart**, ont établi l'expression du champ magnétique élémentaire \vec{dB} produit par un petit élément de fil conducteur \vec{dl} parcouru par un courant I à une distance d dans le vide.



Soit \vec{u} le vecteur unitaire dont la direction est celle reliant l'élément de courant au point considéré, alors :

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{dl} \wedge \vec{u}}{d^2}$$

Chapitre 2 : Champs magnétiques statiques et interactions

Dans le système international d'unité (SI), le champ magnétique s'exprime en une unité dérivée, le tesla (symbole : T), en l'honneur de **Nikola Tesla** (1856-1943), inventeur hors-pair de nombreuses applications de l'électromagnétisme.

μ_0 est une constante, appelée « **constante magnétique du vide** » ou « constante de perméabilité magnétique du vide » ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} T \cdot m \cdot A^{-1}$).

Le champ magnétique total créé par un circuit électrique de forme quelconque parcouru par un courant continu, s'obtient par intégration le long du circuit :

$$\vec{B} = \int_{\text{circuit}} \overrightarrow{dB}$$

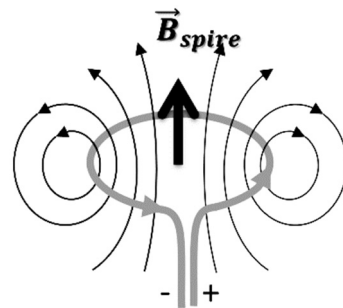
CHAMP MAGNETIQUE CREE PAR UNE SPIRE DE COURANT

Soit une boucle de courant (spire) circulaire de rayon r parcourue par un courant I continu.

La norme du champ magnétique créé au centre de la spire est donnée par (cf. Annexe 2 page 40) :

$$B_{\text{Spire}} = \frac{\mu_0}{2r} I$$

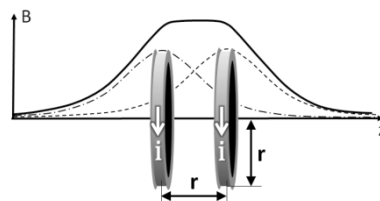
La direction du champ magnétique est perpendiculaire au plan de la spire.



Le champ magnétique produit au centre d'une bobine plate constituée d'un enroulement de fil conducteur de N tours, devient : $B_{\text{bobine}} = \frac{\mu_0 N}{2r} I$

CHAMP UNIFORME ET GRADIENT DE CHAMP

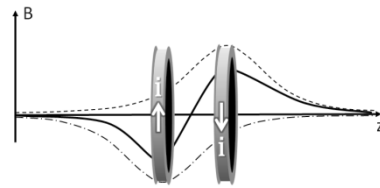
Hermann Ludwig von Helmholtz (1821-1894), médecin et physicien allemand, a montré que lorsque 2 bobines plates circulaires identiques sont disposées face à face à une distance égale à leur rayon, on obtient un *champ uniforme* entre les 2 bobines.



Un *champ uniforme* est également obtenu à l'intérieur d'un **solénoïde**, constitué d'un enroulement en hélice d'un fil conducteur.

Chapitre 2 : Champs magnétiques statiques et interactions

Si, dans un montage de type « Helmholtz », on inverse le courant d'une bobine par rapport à l'autre, on crée au contraire un « *gradient de champ magnétique* », c'est-à-dire un champ variable de manière quasi-linéaire dans l'espace.



Ces configurations sont utilisées dans les appareils d'imagerie par résonance magnétique (IRM) qui nécessitent à la fois des bobines génératrices de champ uniforme et des bobines de gradients.

LE PROBLEME DES BOBINES RESISTIVES : L'EFFET JOULE

Pour réaliser des images IRM, le patient doit être placé dans un champ magnétique statique suffisamment important. Les appareils d'IRM nécessitent des bobines de grand diamètre à l'intérieur desquelles est placé le sujet.

Deux types de bobines sont utilisées : résistives ou supraconductrices.

Du fait que les bobines résistives sont de grand diamètre et que le champ magnétique généré doit être élevé, la puissance calorifique dégagée par effet Joule et la masse de ces bobines résistives sont nécessairement très importantes (cf. Annexe 3 page 41), ce qui limite leur possibilité d'utilisation.

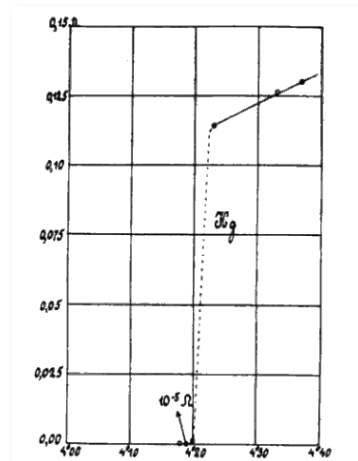
En pratique, les IRM fonctionnant avec des bobines résistives ne permettent pas de disposer de champs intenses, c'est-à-dire supérieurs à 0,5 T.

BOBINES A SUPRACONDUCTEURS

Heike Kamerlingh Onnes (Nobel 1913), physicien néerlandais, premier à produire la liquéfaction de l'hélium en 1908 à une température proche de 4K (-269°C), découvrit en 1911 qu'à très basse température certains conducteurs perdaient brutalement leur résistivité (cf. figure ci-contre).

Ce phénomène est désigné sous le nom de supraconductivité.

La plupart des appareils modernes d'IRM utilisent des bobines à supraconducteur refroidies avec de l'hélium liquide maintenu en ébullition à 4K.



Relevé effectué en 1911 par H. K. Onnes de la résistivité du mercure en fonction de la température, au laboratoire de Leyde (Pays Bas).