

Introduction

La préparation de l'oral

L'AGRÉGATION de mathématiques se déroule en deux temps : l'écrit, passé assez tôt dans l'année, et l'oral, qui a lieu plusieurs mois après. Pour autant, il ne faut pas croire qu'il faut consacrer autant de temps à la préparation des écrits qu'à celle des oraux.

Le travail de repérage bibliographique, la constitution des plans de leçons, le travail spécifique à l'épreuve de modélisation, le choix et l'apprentissage des développements sont des tâches extrêmement chronophages, auxquelles l'agrégatif doit consacrer la majeure partie de sa force de travail. C'est pourquoi il convient de préparer l'oral dès le début de l'année, même sans certitude quant à l'admissibilité.

D'autres arguments pragmatiques plaident en faveur de cette stratégie. D'une part, plus de la moitié des coefficients du concours sont attribués à l'oral. D'autre part, un travail de fond fourni pour préparer les oraux (et en particulier les développements), aura des répercussions positives sur le niveau à l'écrit, tandis que la préparation des écrits ne bénéficie que dans une bien moindre mesure aux prestations orales. Enfin, il est tout à fait possible d'obtenir des notes brillantes à l'oral en ayant un niveau mathématique relativement modeste. En effet, ces épreuves évaluent d'autres qualités et compétences que les seules connaissances académiques. En revanche, obtenir de très bonnes notes à l'écrit exige un excellent niveau mathématique, qui seul permet de traiter les parties les plus difficiles des sujets.

De l'importance du développement

Le rôle joué par le développement dans la réussite des épreuves orales de mathématiques est absolument fondamental. Non seulement il occupe une partie considérable du temps de passage au tableau, mais il présente aussi l'avantage de pouvoir être préparé à l'avance. C'est le moment de l'épreuve durant lequel le candidat a la main et peut faire facilement bonne impression.

Véritable vitrine du savoir mathématique du candidat, le développement intervient assez tôt dans le déroulement de l'oral. Ainsi une prestation de qualité influera favorablement sur le déroulement de l'épreuve. En revanche, une piètre prestation mettrait le jury dans de très mauvaises dispositions, ce qui déboucherait probablement sur une note au mieux médiocre.

Lorsque l'on choisit d'apprendre un développement, savoir seulement sa preuve est insuffisant et ne constitue que le service minimum. Il faut connaître, dans la mesure du possible, des conséquences théoriques mais aussi des applications pratiques du résultat. Le candidat doit toujours prendre de la hauteur par rapport à l'énoncé présenté. Cette hypothèse est-elle nécessaire ? suffisante ? nécessaire et suffisante ? Il est impératif qu'il ait en tête (ou sur son plan) des contre-exemples pouvant attester qu'il a déjà réfléchi à ces questions.

Utilisation du livre

Ce livre est un recueil de développements d'analyse adaptés au format de l'oral de l'agrégation qui sont présentés avec des notes de contextualisation et beaucoup de détails supplémentaires. Les preuves y sont rédigées et détaillées avec le niveau d'exigence propre au concours et en vue d'éviter au candidat de commettre certaines erreurs classiques.

L'agrégatif pourra y puiser jusqu'à trouver, s'il le souhaite, l'intégralité des développements nécessaires. Et le jour de l'oral, il pourra préparer ses deux développements sans recourir à aucune autre référence, évitant ainsi de perdre un temps précieux dans la bibliothèque.

Néanmoins ce livre ne peut aider que ceux qui auront fait l'effort de s'en approprier le contenu, par un travail régulier, tout au long de l'année. Il est totalement vain d'espérer faire une bonne prestation le jour du concours en le feuilletant à la dernière minute.

Le candidat doit commencer par choisir ses développements tout en ayant en tête qu'il lui en faut deux par leçon. Pour l'aider dans ce choix, il trouvera à la page 14 une liste des leçons d'analyse de l'année 2016-2017 pour l'agrégation externe (options A, B et C), avec des suggestions de développements de cet ouvrage. Notons que les listes des leçons pour les candidats de l'option D et les candidats au concours spécial docteurs sont incluses dans cette liste.

Inversement, au début de chaque développement, nous avons indiqué dans quelles leçons il peut trouver sa place. Remarquons que certains résultats peuvent également être présentés à l'oral d'algèbre, polyvalence indiquée par le symbole $\otimes$.

L'année de préparation à l'agrégation pousse les candidats à dépasser leurs limites. Nous conseillons néanmoins à nos lecteurs de choisir leurs développements judicieusement en adéquation avec leur niveau. Il faut garder à l'esprit qu'un développement de niveau élémentaire présenté avec brio assurera une meilleure note qu'un développement difficile mais bâclé ou mal maîtrisé. Pire un fossé trop grand entre le niveau du développement et celui réel du candidat peut s'avérer catastrophique pour la note. Il ne faut en aucun cas s'aventurer à choisir un développement sans disposer du bagage théorique et technique qu'il exige. La moyenne à l'oral des admis qui reste assez modeste, encourage à ne pas prendre de risques inconsidérés.

Insistons enfin sur le fait que le jury de lui-même n'interrogera pas le candidat sur des résultats hors programme, mais qu'il est fondé à le faire si c'est le candidat qui a introduit dans son plan ou son développement les résultats en question. Donc à chaque fois qu'un candidat fait appel à des théorèmes qui ne sont pas au programme il devra en maîtriser au minimum l'énoncé et avoir une idée de la preuve.

Nous avons à titre indicatif classé les développements en trois niveaux de difficulté identifiés par les symboles suivants :

- ○ ○ Développement de niveau élémentaire qui ne présente pas de difficultés majeures. Il ne va pas forcément enthousiasmer le jury, mais on peut tout à fait espérer une bonne note si l'on en soigne la présentation. Ces exposés sont ceux qui nécessitent le moins de travail de préparation.
- ● ○ Développement de niveau intermédiaire qui peut présenter des difficultés théoriques et/ou calculatoires. La plupart des développements de l'ouvrage rentrent dans cette catégorie. Ces résultats vont permettre au candidat de montrer qu'il dispose d'un bon niveau en mathématiques et ils seront appréciés du jury pour peu qu'ils aient été bien présentés.

● ● ● Développement de niveau difficile qui nécessite des connaissances théoriques et/ou beaucoup de savoir-faire. Choisir un tel développement nécessite du travail et une affinité avec le thème traité. Bien présenté, ils permettra d'obtenir les meilleures notes. Il faut néanmoins bien mesurer la prise de risque allant avec le choix d'un tel exposé.

Le développement est un exercice de style en temps limité, ce qui impose de répéter dans les conditions du concours, c'est-à-dire en écrivant sur un tableau, tout en exposant oralement. Une telle prestation doit durer entre 13 et 15 minutes. Passé ce délai, le jury vous accordera quelques secondes pour conclure brièvement, souvent à l'oral. C'est donc une bonne idée durant les sessions d'entraînement que de se préparer au désagréable exercice qui consiste à donner rapidement les éléments essentiels qui auraient permis de conclure si l'allure avait été plus rapide.

Là aussi, nous avons à titre indicatif classé les exposés en trois niveaux de longueur :

  Développement court qui laisse au candidat une marge d'erreur et lui permet de prendre son temps. Il peut en profiter pour exposer de façon détaillée et très pédagogique.

  Développement raisonnablement long mais qui laisse peu de place à des hésitations ou à des erreurs.

 Développement long qui doit être connu sur le bout des doigts et exposé avec vivacité. Certains passages doivent être érudés ou expliqués uniquement à l'oral. Le défi consistera à ne pas pour autant fixer le tableau sans jamais se retourner vers le jury.

Passage au tableau

Afin de rendre compte du débit de parole considérable dont doit faire preuve le candidat pendant les 15 minutes de sa présentation, nous avons favorisé un style mathématique littéraire. Il est évidemment irréaliste de vouloir tant écrire au tableau en si peu de temps, même à l'issue d'un an d'entraînement intensif.

Le candidat doit donc maintenir un débit oral soutenu, en n'inscrivant en revanche que les mots et les calculs clés ainsi que les étapes décisives de la preuve. Il veillera à écrire dynamiquement et lisiblement, et à bien occuper l'espace de son tableau. Le recours aux dessins doit être systématique chaque fois que c'est possible, mais il faudra prendre garde à ne pas griffonner de minuscules croquis illisibles. Si le tableau est rempli avant la fin, le jury est en

droit de refuser qu'il soit effacé, et même si en général il le permet, la chose est du plus mauvais effet.

L'agrégation est un concours de recrutement de professeurs et à ce titre, le jury s'attachera à évaluer la pédagogie dont fait preuve le candidat, et plus généralement sa présence et sa prestance à l'oral. Le candidat doit retenir l'attention du jury, voire même attiser sa curiosité. Parmi les dizaines de candidats que les membres du jury interrogent chaque semaine, parfois dans un état de lassitude avancé, l'enjeu est de se démarquer du lot et de se distinguer !

Exemple de présentation au tableau

Nous donnons ici un exemple de tableau à l'issue d'un développement. Notez qu'on ne dispose pas toujours de marqueurs de différentes couleurs pour mettre certains résultats en relief.

Nous avons choisi le développement sur la formule sommatoire de Poisson et la formule d'échantillonnage de Shannon qui se trouve à la page 253. On remarquera la forte différence de taille entre les deux versions indiquant la quantité de détails à présenter oralement.

Théorème
Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors : • Pour tout réel t, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n+t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) \exp(2ik\pi t)$ • Si de plus $\text{Supp}(\hat{f}) \subset [-F, F]$ avec $F \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $2F \leq 1$, alors : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) \frac{\sin((n-t)\pi)}{(n-t)\pi}.$

• Soient $K \subset \mathbb{R}$ compact, $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $K \subset [-N, N]$. Comme $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, pour $i = 1, 2$, on dispose de $M_i \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, |f^{(i)}(t)| \leq \frac{M_i}{1+t^2}.$$

Pour tout $t \in K$, $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|n| \geq N + 1$, on a :

$$|f^{(i)}(t + n)| \leq \frac{M_i}{1 + (t + n)^2} \leq \frac{M_i}{(|n| - N)^2}.$$

Donc pour $i = 1, 2$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f^{(i)}(n + \cdot)$ converge normalement sur K . Donc (théorème de régularité d'une série d'applications) $g := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n + \cdot) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

• g 1-périodique. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $t \in \mathbb{R}$:

$$g(t) \xleftarrow{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N f(n + t + 1) = \sum_{n=-N+1}^{N+1} f(n + t) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} g(t + 1).$$

• Soit $k \in \mathbb{Z}$.

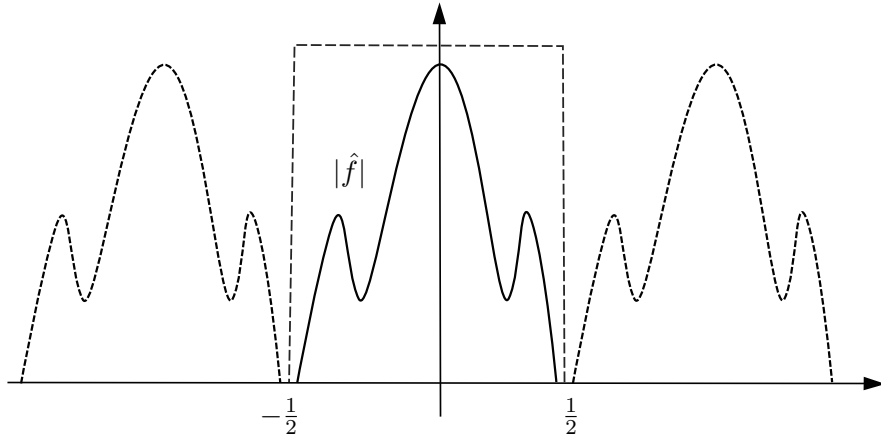
$$\begin{aligned} c_k(g) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n + t) \right) e^{-2i\pi kt} dt \\ &\stackrel{\text{CVN}+[\cdot, \cdot]}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(n + t) e^{-2i\pi kt} dt \\ &\stackrel{x=t+n}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} f(x) e^{-2i\pi k(x-n)} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi kx} dx, \text{ car } f \in \mathbb{L}^1, \\ &= \hat{f}(k). \end{aligned}$$

Or $g \in \mathcal{C}_{\text{pm}}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$, donc d'après le théorème de convergence normale :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n + t) = g(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) \exp(2ik\pi t). \quad \square$$

• Comme $\mathcal{F}$ automorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Par formule de Poisson pour $\hat{f}$ et formule d'inversion de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k + \xi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(-n) \exp(2in\pi\xi).$$



Or $2F \leq 1$, donc pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, $\hat{f}(k + \cdot) = 0$ sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Donc :

$$\hat{f} = \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k + \cdot) = \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(-n) e^{2in\pi \cdot}.$$

Soit $t \in \mathbb{R}$. Par formule d'inversion de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(\xi) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(-n) e^{2in\pi\xi} \right) e^{2i\pi\xi t} d\xi \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(-n) e^{2i(n+t)\pi\xi} d\xi \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m) e^{2i(t-m)\pi\xi} d\xi. \end{aligned}$$

Or $\|f(m) \exp(2i(t-m)\pi \cdot)\|_{\infty} = |f(m)|$, donc, d'après le premier point, la série $\sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m) \exp(2i(t-m)\pi \cdot)$ converge normalement sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Donc par interversion $\sum / \int$:

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2i(t-m)\pi\xi} d\xi = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m) \frac{\sin((m-t)\pi)}{(m-t)\pi}.$$

□

Couplages des leçons et développements

201. Espaces de fonctions ; Exemples et applications.

- Théorème d'Ascoli
- Théorème de Montel
- Espace de Bergman
- Théorème de Grothendieck

202. Exemples de parties denses et applications.

- Théorème de Grothendieck
- Théorème de Chudnovsky
- Divergence des séries de Fourier des application continues
- Inégalité de Hardy
- Résolution d'une É.D.P.E

203. Utilisation de la notion de compacité.

- Théorème d'Ascoli
- Théorème de Montel
- Compacts dans les espaces de Banach
- Théorèmes de Banach-Alaoglu
- Ellipsoïde de John-Loewner
- Théorèmes de point fixe compact

204. Connexité. Exemples et applications.

- Théorème d'Hadamard-Lévy
- Formule des compléments

205. Espaces complets. Exemples et applications.

- Compacts dans les espaces de Banach
- Théorème de Grothendieck
- Espace de Bergman
- Convergence faible dans $\ell^1(\mathbb{N})$
- Divergence des séries de Fourier des application continues
- Inégalité de Hardy
- Théorème de Cauchy linéaire ou Théorème de Cauchy-Lipschitz

207. Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

- Formule des compléments
- Inégalité de Hardy