

CHAPITRE I

LE CHAMP ELECTROMAGNETIQUE

Ce chapitre introductif vise à préciser les notions de champs et de sources qui seront constamment utilisées par la suite. Il se propose également d'indiquer les principaux formalismes mathématiques qui interviendront, en rappelant les résultats essentiels. Enfin on introduit les équations qui gouvernent le rayonnement en espace libre, les principaux cas particuliers de champ électromagnétique avec ou sans sources, et les invariances qui seront utilisées par la suite.

Dans cette première partie on ne postule pas la symétrie de révolution. L'objet de la seconde partie sera de développer ses conséquences dans les différentes situations étudiées dans cette première partie.

Le contexte général est le suivant: on s'intéresse au problème du rayonnement et de la diffusion des champs électromagnétiques dans des milieux ou des ensembles de milieux homogènes, séparés les uns des autres par des surfaces régulières, et dont la réponse dépend linéairement de l'excitation. Ces milieux sont typiquement les milieux diélectriques ou imparfaitement conducteurs.

1. PRELIMINAIRES MATHÉMATIQUES

La description du champ électromagnétique fait appel aux outils de l'analyse mathématique. On peut éviter de les introduire sous leur forme la plus précise, utilisant le langage des espaces de Sobolev, pour lequel on pourra se reporter à des ouvrages tels que [1]. Mais deux outils sont indispensables pour comprendre les fondements mathématiques de la théorie électromagnétique, ce sont le langage des distributions et l'analyse de Fourier. L'un et l'autre sont d'ailleurs intimement liés dans la théorie des équations aux dérivées partielles.

- La *théorie des distributions* permet de rendre compte des solutions d'équations aux dérivées partielles ou d'équations intégrales. Plus généralement elle permet de traiter les singularités, qui sont les points où une grandeur physique ne peut être décrite par une fonction finie et continue ; comme on le verra, toute source équivaut à une singularité du champ.

- La *transformation de Fourier* permet de passer des représentations temporelles aux représentations fréquentielles et inversement.

On rencontre ces mêmes outils ailleurs, par exemple en acoustique et en traitement du signal [14]. La différence avec l'acoustique est qu'ici les champs sont des vecteurs et non des scalaires. La différence avec le traitement du signal est qu'au lieu de signaux scalaires, ou du moins de dimension finie, provenant d'un ensemble de capteurs, on s'intéresse à des champs qui ont une infinité de degrés de liberté.

Outre ces deux outils on aura à utiliser le théorème de Stokes, qui porte souvent d'autres noms dans différents cas particuliers (Green-Riemann pour les surfaces, Green-Ostrogradsky pour les volumes), et dont la forme générale est [2]:

$$\int_{\Omega} d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega$$

Dans cette égalité Ω est un domaine de l'espace à d dimensions, $\partial\Omega$ sa frontière, ω est une forme différentielle et $d\omega$ sa dérivée. Les applications les plus fréquentes sont:

- $d=3$. Ω est un volume, la forme $\omega = \vec{v} \cdot \hat{n} dS$ est le flux d'un vecteur \vec{v} à travers l'élément de surface dS de la frontière (la normale dirigée vers l'extérieur étant \hat{n}) et sa dérivée est le produit de la divergence du vecteur par l'élément de volume, $d\omega = (\nabla \cdot \vec{v}) dV$

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \vec{v}) dV = \int_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot \hat{n} dS$$

- $d=2$. Ω est une surface, la forme $\omega = \vec{v} \cdot d\vec{l}$ est la circulation du vecteur \vec{v} le long du bord de la surface et sa dérivée est le flux à travers l'élément de surface dS du rotationnel, soit $d\omega = (\nabla \times \vec{v}) \cdot \hat{n} dS$

$$\int_{\Sigma} (\nabla \times \vec{v}) \cdot \hat{n} dS = \int_{\partial\Sigma} \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

- $d=1$. Ω est un segment, la forme $\omega = fg$ est le produit de deux fonctions dérivables, et on retrouve la formule de l'intégration par parties sur le segment Ω .

1.1 Distributions, dérivations, convolutions

On ne peut pas toujours représenter les grandeurs physiques réparties dans l'espace par des fonctions continues, encore moins dérivables. Il faut, par exemple, introduire des transitions abruptes entre deux milieux continus et homogènes différents. De toute manière une description exacte devrait tenir compte de la théorie atomique: au niveau microscopique, la matière est discontinue. Donc le réalisme physique se conjugue à la commodité mathématique pour imposer le formalisme des distributions.

Quand une grandeur physique est représentée par une distribution Q , cela signifie simplement qu'à toute fonction de l'espace $f(x)$ régulière (indéfiniment dérivable) et de support borné on sait associer un nombre $Q(f)$ qui représente la somme des valeurs prises par la grandeur considérée aux différents points de l'espace, pondérée par la fonction f . On peut appeler f fonction de pondération ou fonction test.

Dans ce paragraphe x désigne toujours un point de l'espace, et u désigne l'une de ses coordonnées. Si la grandeur physique est distribuée selon une fonction continue $q(x)$, $Q(f)$ est l'intégrale du produit de cette fonction par f : $Q(f) = \int q(x)f(x)dx$.

Si la grandeur physique est un champ vectoriel on emploiera une fonction de pondération vectorielle et, dans le cas continu, l'intégrale sera celle du produit scalaire entre le champ et cette fonction. Par exemple, le gradient d'une distribution scalaire est défini comme celui d'une fonction, c'est la distribution vectorielle dont les composantes, dans un repère cartésien, sont ses dérivées partielles.

La *dérivée d'une distribution* se définit à l'aide de fonctions de pondération par:

$$\frac{\partial Q}{\partial u}(f) = -Q\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)$$

Une intégration par parties montre que, dans le cas où Q est une fonction dérivable, cette distribution coïncide avec la dérivée de la fonction:

$$\frac{\partial Q}{\partial u}(f) = - \int q(x) \frac{\partial f}{\partial u}(x) dx = \int \frac{\partial q}{\partial u}(x) f(x) dx$$

La somme de ces deux intégrales est l'intégrale de la dérivée partielle du produit $q(x)f(x)$, elle est nulle du fait que ce produit s'annule à l'infini, la fonction de pondération étant à support borné.

On définit donc, comme pour les fonctions, gradient, divergence, rotationnel, laplacien etc. des distributions scalaires ou vectorielles, de sorte que toute équation aux dérivées partielles peut s'interpréter *au sens des distributions*.

Si toute distribution est indéfiniment dérivable, en passant des fonctions aux distributions on perd la possibilité de les multiplier. Le produit de deux distributions quelconques n'est pas défini. Mais il reste possible d'effectuer le produit de convolution, qui à deux fonctions f et g en associe une troisième selon la formule:

$$f * g(x) = \int f(x - x')g(x')dx'$$

Ce produit est commutatif, et associatif lorsque les intégrales sont toutes définies. Pour deux distributions générales S et T on définit la convolution par:

$$S * T(f) = S(g) \quad \text{où } f_y(x) = f(x + y) \quad g(y) = T(f_y)$$

La fonction f_y , déduite de f par translation, est aussi une fonction test. On montre que $g(y)$ est aussi indéfiniment dérivable par rapport à y . On suppose qu'elle est à support borné, c'est le cas si la distribution T est elle-même à support borné, de sorte que $S(g)$ est bien défini. Lorsque les distributions sont des fonctions on retrouve la formule de l'intégrale de convolution. Les définitions qui précèdent peuvent être étendues, par exemple en considérant des fonctions de pondération à support non borné, mais à décroissance suffisamment rapide à l'infini. Dans les problèmes d'électromagnétisme on a généralement affaire à des distributions de sources qui sont à support borné. Les champs sont des produits de convolution de ces sources par des distributions particulières (fonctions de Green) à support non borné, et s'étendent donc à tout l'espace.

Une propriété essentielle de la convolution est celle-ci: la dérivée du produit de convolution vérifie:

$$\frac{\partial}{\partial u}(S * T) = \frac{\partial S}{\partial u} * T = S * \frac{\partial T}{\partial u}$$

Ainsi on peut faire porter les dérivations indifféremment sur l'un ou l'autre terme.

La *distribution de Dirac* en un point x est définie par $\delta_x(f) = f(x)$, la distribution de Dirac à l'origine des coordonnées $\delta = \delta_0$ est l'unité du produit de convolution:

$$\delta * T = T$$

Soit une équation aux dérivées partielles de la forme $Du = S$, où D est un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants autrement dit une somme de produits de dérivations partielles, S est une distribution quelconque et u la fonction inconnue. Un exemple est l'équation de Helmholtz:

$$(\Delta + k^2)u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) u = S .$$

On appelle solution élémentaire ou *fonction de Green* une solution G de l'équation $Du = S$ lorsque la source est une distribution de Dirac à l'origine: $S = \delta$. Compte tenu de la règle de dérivation des convolutions on voit qu'une solution de l'équation générale s'obtient par convolution de la fonction de Green avec le second membre:

$$D(G * S) = DG * S = \delta * S = S$$

La fonction de Green n'est pas unique, car définie à une solution de l'équation sans second membre près. Elle le devient moyennant des conditions supplémentaires telles que des conditions de frontière ou de comportement à l'infini.

Jusqu'ici on a supposé que la variable x évoluait dans un espace vectoriel de dimension finie quelconque. La notion de distribution s'étend au cas où les fonctions test sont définies sur des variétés comme des surfaces ou des courbes dans l'espace ordinaire.

La fonction de Green et le théorème de Stokes font le lien entre la formulation d'un problème par équations aux dérivées partielles (EDP) et par équations intégrales. L'exemple le plus simple est celui des problèmes à une dimension dits de *Sturm-Liouville*, auxquels on se ramène chaque fois qu'il est possible de séparer les variables ([1], tome 2). On en trouvera des exemples dans le chapitre VI.

1.2 Transformation de Fourier

Les grandeurs physiques dépendent de l'espace et du temps. Dans le paragraphe précédent les notations x ou y peuvent désigner indifféremment des points d'un espace à une, deux ou trois dimensions, ou de l'espace temps à quatre dimensions. Cependant le temps joue un rôle différent de celui des coordonnées spatiales et il est souvent

avantageux de décrire les grandeurs électromagnétiques non comme des fonctions du temps mais comme des fonctions de la fréquence. On parle de *régime harmonique*, par opposition au *régime temporel ou transitoire*.

Le terme de régime transitoire rappelle que, rigoureusement parlant, les variations temporelles des grandeurs physiques ont un commencement et une fin. On les représente par des fonctions décroissant suffisamment vite à l'infini, typiquement des fonctions de carré intégrable sur l'axe des temps.

En régime harmonique au contraire, pour une fréquence donnée toutes les grandeurs oscillent en fonction du temps, indéfiniment, avec cette fréquence. Ceci n'est physiquement réalisable, évidemment, que de manière approchée, et n'est mathématiquement correct que pour les problèmes linéaires: dans un problème où les effets sont reliés aux causes par des équations linéaires, si l'excitation est harmonique à une certaine fréquence toutes les réponses du système le sont aussi.

Le lien entre les deux régimes est effectué par la transformation de Fourier, qui associe à une fonction du temps $F(t)$ une fonction $\hat{F}(\omega)$ de la pulsation $\omega = 2\pi f$, (où f est la fréquence), qui est donnée par:

$$\hat{F}(\omega) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} F(t) dt$$

Cette définition contient deux conventions, usuelles mais non universelles.

Premièrement le signe dans l'exponentielle est choisi de telle sorte que la transformation de Fourier inverse soit:

$$F(t) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \hat{F}(\omega) d\omega$$

Cela signifie qu'à la pulsation ω toutes les grandeurs ont une dépendance temporelle en $\exp(+i\omega t)$. Si on prend la convention de signe opposée toutes les grandeurs harmoniques doivent être remplacées par leurs complexes conjuguées. On obtient le même résultat dans la formule de définition en changeant le signe de t , de sorte que le renversement du temps équivaut à la conjugaison complexe.

La seconde convention concerne le facteur de normalisation devant l'intégrale, qui est là pour faire en sorte que l'intégrale du carré de la fonction soit égale à celle du carré de la transformée. De ce fait la transformation inverse possède la même expression que la transformation directe, au signe de i près. Ainsi définies, la transformation de Fourier et son inverse sont des opérateurs unitaires de l'espace des fonctions de carré intégrable. Le carré de la fonction est souvent associé à une énergie par unité de temps, le module carré de la transformée de Fourier donne alors la répartition de cette puissance en fonction de la fréquence.

La symétrie entre temps et fréquence n'est pas totale, puisqu'à une fonction réelle d'un temps qui s'écoule de $-\infty$ à $+\infty$ on associe une fonction complexe de la variable pulsation, qui n'a de sens a priori que si elle est positive. De fait les valeurs de la fonction fréquentielle vérifient $\hat{F}(-\omega) = \hat{F}(\omega)^*$, donc il suffit de la connaître pour les fréquences

positives. Il reste qu'en régime harmonique toutes les grandeurs physiques sont représentées par des nombres complexes. Il faut pouvoir passer de celles-ci à des fonctions réelles du temps, qui par hypothèse oscillent à la pulsation ω . La formule de la transformée de Fourier inverse montre qu'à la grandeur complexe X doit correspondre la fonction $F(t) = \text{Re}(Xe^{i\omega t})$. On pourrait tout aussi bien prendre la partie imaginaire que la partie réelle, ou multiplier toutes les grandeurs par un même facteur de module 1, car changer la phase globale équivaut à une translation du temps, et l'origine des temps est évidemment arbitraire en régime harmonique.

Avec ces conventions la dérivation par rapport au temps correspond, pour la transformée de Fourier, à la multiplication par $i\omega$. Une autre propriété essentielle de la transformation de Fourier s'exprime, pour deux fonctions de carré intégrable, par la formule:

$$\widehat{f * g}(\omega) = (2\pi)^{1/2} \hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$$

On définit la transformée de Fourier d'une distribution par $\hat{T}(f) = T(\hat{f})$. On voit facilement que celle d'une distribution de Dirac δ_x est la fonction $(2\pi)^{-1/2}e^{-i\omega x}$.

La transformation de Fourier, bien entendu, n'est pas réservée aux fonctions du temps. On peut associer aux variables d'espace des fréquences spatiales comme on a associé la fréquence au temps, et dans l'espace transformé les dérivations sont remplacées par des multiplications. Ainsi, soit y le vecteur à trois dimensions des fréquences spatiales associées aux coordonnées cartésiennes du point x de l'espace à trois dimensions, la transformée de Fourier est définie par

$$\hat{F}(y) = (2\pi)^{-3/2} \int e^{-iy \cdot x} F(x) dx$$

où l'intégrale (triple) est étendue à tout l'espace. L'équation de Helmholtz devient:

$$(k^2 - y^2)\hat{F}(y) = 0$$

1.3 Grandeurs physiques et objets mathématiques

La problématique générale des situations qu'on va traiter consiste à déterminer, dans tout ou partie de l'espace, le champ électromagnétique qui résulte d'une excitation connue. Cela passe, en vertu du principe de Huygens, par la détermination du champ électrique et/ou magnétique sur certaines surfaces, ou, de manière équivalente, de courants de surface de l'un ou l'autre type. Il résulte des équations de Maxwell que la donnée du champ électrique et du champ magnétique tangentiels sur un élément de surface détermine les composantes restantes. Les objets mathématiques à manipuler sont donc principalement des champs tangents à une surface. Ce sont des inconnues ou des données, les relations entre elles sont décrites par des opérateurs linéaires agissant sur ces champs.

Un tel champ de surface est défini par une surface qui est son support au sens des distributions, et une application qui associe à chaque point de la surface un vecteur du

plan tangent. Ce vecteur est réel si on considère des champs dépendant du temps (régime temporel ou transitoire), complexe si les champs physiques oscillent à une fréquence donnée (régime harmonique), le champ étant alors la transformée de Fourier du champ réel. Les surfaces considérées ici sont toujours régulières et orientables, avec ou sans bord. L'ensemble des champs est un espace vectoriel et possède une structure naturelle d'espace de Hilbert avec pour produit hermitien de deux champs l'intégrale sur la surface de leur produit, en prenant le complexe conjugué de l'un s'ils sont complexes. En fait un champ électrique ou magnétique appartient, du fait des équations auxquelles il obéit, à un espace de Hilbert plus restrictif, de la famille des espaces de Sobolev. Les opérateurs linéaires qui associent un champ de surface à un autre (de même support ou non) sont appelés opérateurs intégraux lorsque le vecteur tangent associé à un point de la surface cible s'exprime comme l'intégrale, sur la surface source, du produit d'une fonction des deux points par le vecteur associé au point source. Cette fonction, dont la valeur pour un couple de points est une matrice de dimension 2, est le noyau de l'opérateur.

Un champ de volume est une application qui associe à chaque point d'un volume donné un vecteur de l'espace à trois dimensions. Les sources physiques du champ électromagnétique sont des densités de courant électrique s'exprimant en A/m^2 alors que le champ électrique s'exprime en V/m et le champ magnétique en A/m .

Un champ électromagnétique de surface est la donnée d'un couple formé d'un champ électrique et d'un champ magnétique de surface. Les opérateurs de l'espace de Hilbert qui associent à un champ magnétique un champ électrique sont des opérateurs d'impédance. Ceux qui font l'inverse sont des opérateurs d'admittance.

2. QU'EST-CE QU'UN CHAMP ELECTROMAGNETIQUE ?

2.1 Notion de champ: des charges et des forces

Le champ est une entité virtuelle, qui ne se manifeste qu'en présence d'un objet sur lequel s'exerce une force attribuée au champ.

Pour la gravitation, qui est l'interaction fondamentale la plus anciennement connue, c'est la masse de l'objet qui détermine cette force. La force est un vecteur proportionnel à la masse et au vecteur de champ, qui, selon la loi de Newton, est égal à l'accélération de la pesanteur. Le champ cause donc la force, et lui-même est dû à la présence des masses de l'univers.

Pour l'électromagnétisme, chronologiquement la deuxième des interactions fondamentales apparues en physique, la quantité qui régit le couplage d'un objet avec le champ et détermine la force qu'il subit du fait du champ n'est pas la masse mais la charge électrique et celle-ci peut avoir l'un ou l'autre signe, comme le montrent les expériences classiques d'électrostatique. Mais le champ est encore la cause du mouvement des objets,

ici des charges électriques, et de nouveau il est engendré par la présence et le mouvement de ces mêmes charges. Le champ électrique est défini à partir de la force $q\vec{E}$ qu'il exerce sur une charge q .

Inversement, si les charges sont statiques elles engendrent un champ électrique, dit alors électrostatique, conformément à la loi de Coulomb : une charge ponctuelle q crée en tout point un champ dirigé suivant le vecteur \vec{r} joignant sa position à celle du point d'observation selon :

$$\vec{E} = q\vec{r}/(4\pi\epsilon r^3) \quad (1)$$

La constante ϵ , appelée *permittivité électrique*, dépend du milieu et du système d'unités choisi. La permittivité électrique du vide, exprimée en farads/m, a pour valeur $10^{-9}/36\pi$.

- Champ électrostatique

Lorsqu'il y a un ensemble de charges ponctuelles le champ électrique est la somme des champs dus à chaque charge. C'est le *principe de superposition*. Physiquement on sait que la charge électrique est portée par des électrons, qui sont effectivement des particules ponctuelles, et d'autres particules : protons, noyaux d'atomes ionisés etc.. Elle est de plus quantifiée, chaque porteur ayant un multiple de la charge élémentaire de l'électron. Cependant, pour les besoins de la théorie électromagnétique, on aura à considérer des distributions de charges et de courants plus générales : d'une part, décrire un ensemble de particules par une fonction de l'espace et du temps est évidemment une excellente approximation à l'échelle macroscopique ; d'autre part, on devra aussi introduire des répartitions de sources à une ou deux dimensions, c'est-à-dire localisées sur une courbe ou une surface. On fera donc appel au formalisme des distributions.

Le principe de superposition et la loi de Coulomb entraînent que le champ électrostatique soit lui-même une distribution vectorielle égale au produit de convolution de la distribution scalaire Q et de la fonction vectorielle \vec{r}/r^3 :

$$\vec{E} = Q * \left(\frac{\vec{r}}{4\pi\epsilon r^3}\right) \quad (2)$$

Pour une distribution continue ceci se traduit par une intégrale de volume:

$$\vec{E}(x) = \int \frac{Q(x')\vec{r}}{4\pi\epsilon r^3} dx' \quad , \text{ où } \vec{r} = x - x' .$$

Pour une charge ponctuelle on retrouve la formule (1) en prenant la distribution de Dirac multipliée par la valeur de la charge, $Q = q\delta_{x'}$.

- Champ magnétostatique

On peut décrire le champ magnétostatique de manière analogue en introduisant la notion de pôle magnétique. Mais l'analogue de la charge électrique, le monopôle magnétique, n'existe pas dans l'univers actuellement connu, de sorte qu'introduire le champ magnétique à partir d'une force analogue à celle de Coulomb agissant sur des charges magnétiques est artificiel. Le point de départ physique est qu'en présence de sources magnétiques comme un aimant ou un circuit électrique une charge électrique en mouvement est soumise à une force perpendiculaire à sa vitesse \vec{v} , qui peut donc s'écrire comme un produit vectoriel