Jour n^{o}1

Exercice 1.1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1) A est-elle diagonalisable ?

2) Montrer qu'il existe quatre suites réelles (a, b, c, d) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & -b_n \\ a_n & b_n & -b_n \\ c_n & d_n & -d_n \end{pmatrix}.$$

3) En utilisant $A^{n+1} = A^n A = AA^n$, déterminer 8 relations de récurrence liant a_n, b_n, c_n, d_n.

4) Déterminer a_n, b_n, c_n, d_n en fonction de n en commençant par c_n.

Exercice 1.2

On considère la série $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$.

1) Représenter quelques sommes partielles de cette série. Conjecturer la valeur de sa somme.

2) Vérifier la conjecture effectuée à l'aide d'un développement en série de Fourier.

Énoncé

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1) A est-elle diagonalisable ?

2) Montrer qu'il existe quatre suites réelles (a, b, c, d) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & -b_n \\ a_n & b_n & -b_n \\ c_n & d_n & -d_n \end{pmatrix}.$$

3) En utilisant $A^{n+1} = A^n A = AA^n$, déterminer 8 relations de récurrence liant a_n, b_n, c_n, d_n.

4) Déterminer a_n, b_n, c_n, d_n en fonction de n en commençant par c_n.

Analyse stratégique de l'énoncé

La première question est banale et doit être bien traitée par tous les candidats. La suite propose un calcul de puissance n-ième de matrice par récurrence, avec une méthode différente de celle du cours. Si les calculs finaux sont un peu lourds, rien n'est difficile.

1) Rassemblez simplement vos connaissances sur la diagonalisabilité de matrices et attaquez les calculs.

$\hookrightarrow$ Il s'agit d'un exercice de routine : calcul de polynôme caractéristique, valeurs propres, puis on cherche la bonne condition pour conclure.

2) $*$ Vous avez certainement remarqué que la propriété requise était bien vérifiée pour $n = 1$.

$*$ Peut-être avez-vous calculé A^2... et ensuite ?

$\hookrightarrow$ Nous allons prouver la propriété voulue par récurrence.

3) Calculer $A^n A$ et AA^n et les identifier à A^{n+1} pour faire apparaître les relations de récurrence voulues.

$\hookrightarrow$ L'énoncé est parfaitement explicite, pas d'autre indication à donner.

4) $*$ Essayer d'isoler c_n, quitte à passer à une relation de récurrence d'ordre 2.

$*$ Pour c_n, appliquer la méthode du cours : résoudre l'équation caractéristique et conclure.

$*$ Pour les autres suites, exploiter judicieusement les relations de la question précédente pour arriver au résultat avec le moins de calculs possibles.

$\hookrightarrow$ Il s'agit d'exploiter au mieux les relations données. On calcule c_n grâce à une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, les valeurs des autres suites se déduisant de ce premier calcul.

Corrigé

1) • Calcul du polynôme caractéristique χ_A de A.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{array}{lll}
\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) & = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\[2em]
L_1 \leftarrow L_1 - L_2 & = \begin{vmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\[2em]
C_2 \leftarrow C_2 + C_1 & = -\lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\[2em]
\text{Développement } L_1 & = -\lambda \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
\text{Règle de Sarrus} & = -\lambda((2-\lambda)(-1-\lambda)+1) \\
 & = -\lambda(\lambda^2 - \lambda - 1).
\end{array}$$

• Racines de ce polynôme.

Le discriminant du trinôme du second degré $\lambda^2 - \lambda - 1$ est $\Delta = 5$. Les racines de ce trinôme sont donc $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. On a pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \lambda \right) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} - \lambda \right)$$

si bien que χ_A est scindé à racines simples. Ceci est une condition suffisante pour affirmer que

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$$

2) On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété P_n : « Il existe quatre réels (a_n, b_n, c_n, d_n) tels que $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & -b_n \\ a_n & b_n & -b_n \\ c_n & d_n & -d_n \end{pmatrix}$ ».

Montrons par récurrence sur n que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$*$ *Initialisation.* La propriété requise est bien vérifiée par $A^1 = A$ en posant $a_1 = 1$, $b_1 = 1$, $c_1 = 0$, $d_1 = 1$. P_1 est donc vraie.

$*$ *Hypothèse de récurrence et hérédité.* Pour $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque fixé, supposons la propriété P_n vraie. On a alors

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} a_n & b_n & -b_n \\ a_n & b_n & -b_n \\ c_n & d_n & -d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n + b_n & a_n & -a_n \\ a_n + b_n & a_n & -a_n \\ c_n + d_n & c_n & -c_n \end{pmatrix}.$$

Si l'on pose alors

$$\left\{\begin{array}{l} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = a_n \\ c_{n+1} = c_n + d_n \\ d_{n+1} = c_n \end{array}\right.$$

il vient bien $A^{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & -b_{n+1} \\ a_{n+1} & b_{n+1} & -b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} & -d_{n+1} \end{pmatrix}$. On a donc prouvé

$$P_n \Rightarrow P_{n+1}.$$

$*$ En conclusion, la propriété P_1 étant vraie et l'hérédité ayant été vérifiée, le théorème de récurrence permet de conclure que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On a donc bien l'existence de quatre suites réelles (a, b, c, d) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & -b_n \\ a_n & b_n & -b_n \\ c_n & d_n & -d_n \end{pmatrix}.$$

3) Nous avons, lors de la question précédente, établi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ quatre relations de récurrence. En exploitant $A^{n+1} = A^n A$. On a de plus

$$\begin{aligned} A^{n+1} = AA^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & b_n & -b_n \\ a_n & b_n & -b_n \\ c_n & d_n & -d_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2a_n - c_n & 2b_n - d_n & -2b_n + d_n \\ 2a_n - c_n & 2b_n - d_n & -2b_n + d_n \\ a_n - c_n & b_n - d_n & -b_n + d_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi quatre nouvelles relations de récurrence. Avec celles de la question précédente, on a finalement pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\boxed{\left\{\begin{array}{ll} a_{n+1} = a_n + b_n & (1) \\ b_{n+1} = a_n & (2) \\ c_{n+1} = c_n + d_n & (3) \\ d_{n+1} = c_n & (4) \\ a_{n+1} = 2c_n - d_n & (5) \\ b_{n+1} = 2b_n - d_n & (6) \\ c_{n+1} = a_n - c_n & (7) \\ d_{n+1} = b_n - d_n. & (8) \end{array}\right.}$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Calculons explicitement les coefficients (a_n, b_n, c_n, d_n) en fonction de n.

• Détermination de c_n.

À l'aide des relations (3) et (4) ci-dessus appliquées aux rangs $n+1$ et n respectivement, on obtient

$$\left\{\begin{array}{l} c_{n+2} = c_{n+1} + d_{n+1} \\ d_{n+1} = c_n \end{array}\right.$$

d'où

$$c_{n+2} - c_{n+1} - c_n = 0. \quad (\diamondsuit)$$

Il s'agit d'une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Son équation caractéristique est

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

On remarque qu'il s'agit de la même équation qu'à la première question, dont les solutions sont

$$\boxed{\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.}$$

Nous pouvons donc affirmer qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$c_n = \lambda\varphi^n + \mu\psi^n. \quad (\spadesuit)$$

Afin de déterminer λ et μ, nous allons exploiter les conditions initiales. Nous savons déjà (voir le corrigé de la question 2) que $c_1 = 0$ et $d_1 = 1$. La relation (3) nous donne donc $c_2 = c_1 + d_1 = 1$.

Nous pourrions utiliser directement ces valeurs de c_1 et c_2 pour obtenir λ et μ, mais nous allons nous simplifier la tâche en définissant une valeur de c_0 vérifiant la relation $(\diamondsuit)$ au rang $n = 0$: il suffit de choisir $c_0 = 1$. Avec ce choix, la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $(\diamondsuit)$ et donc également $(\spadesuit)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il vient pour $n = 0$ et $n = 1$ le système

$$\begin{cases} 1 = \lambda + \mu \\ 0 = \lambda\varphi + \mu\psi. \end{cases}$$

La première équation donne $\lambda = 1-\mu$ et par substitution dans la seconde, on obtient le système équivalent

$$\begin{cases} \lambda = 1 - \mu \\ (1-\mu)\varphi + \mu\psi = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 - \mu \\ \mu = \dfrac{\varphi}{\varphi - \psi} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = \dfrac{5-\sqrt{5}}{10} \\ \mu = \dfrac{5+\sqrt{5}}{10} \end{cases}.$$

On en conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{c_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\varphi^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\psi^n.}$$

• Valeurs des trois autres suites.

La relation (3) nous donne aussitôt pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\boxed{d_n = c_{n-1} = \frac{5-\sqrt{5}}{10}\varphi^{n-1} + \frac{5+\sqrt{5}}{10}\psi^{n-1}}$$

(notons que ceci est bien vrai pour $n = 1$ par choix de c_0). Par la relation (7), il vient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\boxed{a_n = c_n + c_{n+1} = \frac{5-\sqrt{5}}{10}(1+\varphi)\varphi^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10}(1+\psi)\psi^n}$$

et de même par la relation (8)

$$\boxed{b_n = d_n + d_{n+1} = \frac{5-\sqrt{5}}{10}(1+\varphi)\varphi^{n-1} + \frac{5+\sqrt{5}}{10}(1+\psi)\psi^{n-1}.}$$

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir qu'un polynôme caractéristique scindé à racines simples est une condition suffisante pour qu'une matrice (ou un endomorphisme) soit diagonalisable *(mais non nécessaire en général).*

♡ Il faut se souvenir de la méthode de résolution des récurrences linéaires à deux termes à coefficients constants.

> Rapport du jury 2009
>
> Trop de candidats ne maîtrisent pas la résolution de suites définies par une récurrence double.

♡ Il faut se souvenir de l'astuce consistant, pour ce genre de récurrences, à définir le cas échéant un terme d'ordre 0 pour simplifier les calculs.

Formulaire

• Le polynôme caractéristique de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est $\chi_A : \lambda \mapsto \det(A - \lambda I_n)$.

• Pour une récurrence du type $u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$, l'équation caractéristique est

$$r^2 + ar + b = 0.$$

• Si les racines de cette équation caractéristique sont φ et ψ distinctes, alors il existe deux scalaires λ et μ tels que pour tout n

$$u_n = \lambda\varphi^n + \mu\psi^n.$$

On considère la série $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$.

1) Représenter quelques sommes partielles de cette série. Conjecturer la valeur de sa somme.

2) Vérifier la conjecture effectuée à l'aide d'un développement en série de Fourier.

Analyse stratégique de l'énoncé

Cet exercice présente la particularité d'utiliser l'outil informatique pour conjecturer un résultat qu'on n'a pas nécessairement la possibilité de trouver seul. Nous allons devoir représenter plusieurs graphes de fonctions, éventuellement superposés sur un même dessin. La lecture de ce dessin nous permettra de faire la conjecture sur la valeur de la fonction somme f recherchée. Dans un second temps, nous déterminerons le développement en série de Fourier de f afin de vérifier nos hypothèses.

1) $*$ Il n'est pas interdit de rêver... Maple peut-il calculer la somme de cette série ?

$*$ Le résultat fourni par Maple n'étant pas exploitable simplement, on se tourne vers la méthode suggérée par l'énoncé. En constatant que la somme partielle d'ordre n de cette série dépend donc de n et de x, on peut penser à utiliser une fonction de deux variables.

$*$ Il faut savoir faire un tracé multiple. Il n'est pas interdit d'utiliser l'aide.

$*$ Un tracé pour une valeur de n assez grande laisse penser que la somme de cette série est certainement constituée de morceaux de droites. Essayez de « deviner » l'équation d'une de ces portions de droite. Peut-être l'usage d'un repère orthonormé facilitera-t-il le travail.

$\hookrightarrow$ On peut conjecturer que pour $x \in]0, 2\pi[$, la somme de la série est $\frac{\pi - x}{2}$.

2) $*$ Comme pour tout exercice de calcul de série de Fourier, on vérifie les hypothèses nécessaires à l'application du théorème de Dirichlet, et on s'intéresse à la parité de la fonction.

$*$ Le calcul des coefficients de Fourier b_n ne donnera pas un résultat satisfaisant si on ne précise pas à Maple la nature de n.

$\hookrightarrow$ En utilisant `assume`, préciser que n est un entier naturel pour calculer les coefficients b_n. Conclure avec le théorème de Dirichlet.

Corrigé

1) Nous noterons dans la suite pour $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}.$$

Remarquons que nous ne pouvons pas *a priori* affirmer la convergence de cette série, à part pour $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, où elle est trivialement nulle. Voyons à tout hasard si Maple sait calculer cette somme...

```
>sum(sin(n*x)/n,n=1..infinity);
```

$$\frac{-1}{2} I(-\ln(1-\mathrm{e}^{xI}) + \ln(1-\mathrm{e}^{-Ix}))$$

Ce résultat fait apparemment intervenir des logarithmes de nombres complexes : nous sommes manifestement au-delà du programme de PT. Revenons aux questions posées.

• Données de l'énoncé.

On définit

```
>S:=(x,n)->sum(sin('k'*x)/'k','k'=1..n);
```

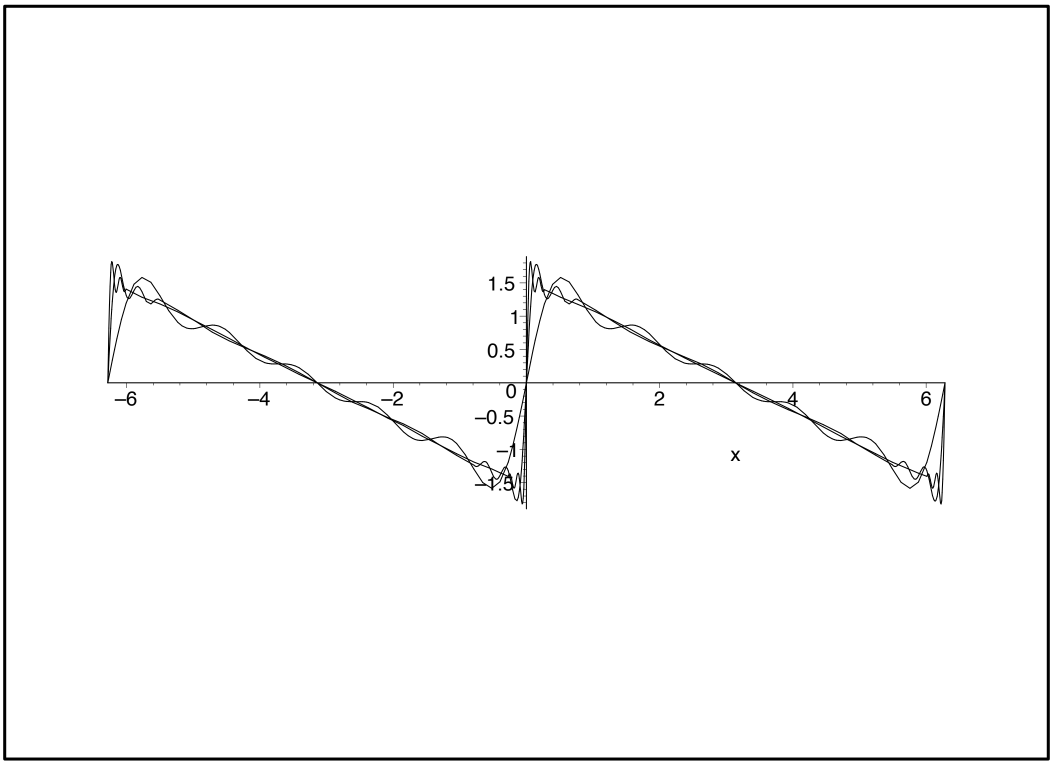
$$S := (x,n) \to \sum_{'k'=1}^{n} \frac{\sin('k' x)}{'k'}$$

On rappelle que le fait de placer `k` entre « ' ' » permet d'éviter les problèmes survenant parfois avec `sum` lorsque la variable de sommation est déjà affectée.

• Tracé de quelques sommes partielles.

Traçons quelques unes de ces sommes partielles sur le même graphe. On choisit un repère orthonormé pour faciliter la conjecture. De plus, constatant que `S` est manifestement une fonction de x 2π-périodique, on les trace par exemple sur deux périodes.

```
>plot([S(x,5),S(x,20),S(x,50)],x=-2*Pi..2*Pi,scaling=constrained);
```



On en représente une dernière, pour une grande valeur de n.

```
>plot(S(x,200),x=-2*Pi..2*Pi,scaling=constrained);
```