Sujet n° 1

Mines 2015 – Maths 1

L'énoncé

– On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions bornées de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

– On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des suites de nombres réels positifs de somme égale à 1 :

$$\mathcal{P} = \left\{ P = (p_n,\ n \geqslant 0) \text{ tel que } \forall n \geqslant 0,\ p_n \geqslant 0 \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \right\}.$$

– Pour P et Q deux éléments de $\mathcal{P}$, on définit

$$\operatorname{dist}(P, Q) = \sup_{A \subset \mathbb{N}} \left| \sum_{n \in A} p_n - \sum_{n \in A} q_n \right| = \sup_{A \subset \mathbb{N}} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_A(n) p_n - \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_A(n) q_n \right|,$$

où $\mathbf{1}_A(n) = 1$ si $n \in A$ et $\mathbf{1}_A(n) = 0$ sinon. On pourra écrire $P(A)$ pour $\sum_{n \in A} p_n$.

– Dans tout ce qui suit, λ est un réel strictement positif fixé et h est un élément de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire une fonction bornée de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

I. Préliminaires

1. Trouver le réel c tel que la suite

$$c\frac{\lambda^n}{n!},\ n \geqslant 0,$$

appartienne à $\mathcal{P}$.

2. Soit p et q deux réels de $[0, 1]$. Calculer

$$\operatorname{dist}\Big((1-p, p, 0, \cdots), (1-q, q, 0, \cdots)\Big).$$

3. Soit $f \in \mathcal{F}$ et $P \in \mathcal{P}$, montrer que la série de terme général $(f(n)p_n,\ n \geqslant 0)$ est convergente.

II. Caractérisation

Soit $P_\lambda = (p_n^{(\lambda)},\ n \in \mathbb{N}) \in \mathcal{P}$ défini par

$$p_n^{(\lambda)} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

4. Soit $f \in \mathcal{F}$. Montrer que la série de terme général $(nf(n)p_n^{(\lambda)},\ n \geqslant 0)$ est convergente.

5. Pour tout $f \in \mathcal{F}$, établir l'identité suivante :

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} f(n+1)p_n^{(\lambda)} = \sum_{n=0}^{\infty} nf(n)p_n^{(\lambda)}. \tag{1}$$

Soit $Q = (q_n,\ n \geqslant 0)$ un élément de $\mathcal{P}$ tel que pour tout $f \in \mathcal{F}$, l'identité suivante soit satisfaite :

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} f(n+1)q_n = \sum_{n=0}^{\infty} nf(n)q_n.$$

6. En choisissant convenablement des éléments de $\mathcal{F}$, montrer que $Q = P_\lambda$.

III. Résolution de l'équation de Stein

On note S_h, l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, telles que, pour tout entier $n \geqslant 0$, l'identité suivante soit satisfaite :

$$\lambda f(n+1) - nf(n) = h(n) - \sum_{k=0}^{\infty} h(k)p_k^{(\lambda)}. \tag{2}$$

Pour simplifier les notations, on note $\tilde{h}$ la fonction définie pour tout $n \geqslant 0$ par

$$\tilde{h}(n) = h(n) - \sum_{k=0}^{\infty} h(k)p_k^{(\lambda)}$$

7. Montrer que S_h possède une infinité d'éléments et que pour tout $f \in S_h$, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$f(n) = \frac{(n-1)!}{\lambda^n}\sum_{k=0}^{n-1}\tilde{h}(k)\frac{\lambda^k}{k!}. \tag{3}$$

8. Pour $f \in S_h$, pour tout entier $n \geqslant 1$, établir l'identité suivante :

$$f(n) = -\frac{(n-1)!}{\lambda^n}\sum_{k=n}^{\infty}\tilde{h}(k)\frac{\lambda^k}{k!}. \tag{4}$$

9. En déduire que toute fonction $f \in S_h$ est bornée.

IV. Propriété de Lipschitz

Pour une fonction f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, on considère la fonction Δf définie par

$$\begin{array}{rcl} \Delta f : \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & f(n+1) - f(n). \end{array}$$

On veut montrer que pour $f \in S_h$,

$$\sup_{n \geqslant 1} |\Delta f(n)| \leqslant \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sup_{k \in \mathbb{N}} h(k) - \inf_{k \in \mathbb{N}} h(k) \right). \tag{5}$$

Pour un entier $m \geqslant 0$, on considère d'abord le cas particulier où $h = \mathbf{1}_{\{m\}}$:

$$h(m) = 1 \text{ et } h(n) = 0 \text{ si } n \neq m.$$

On note f_m l'un des éléments de $S_{\mathbf{1}_{\{m\}}}$.

10. Établir pour $1 \leqslant n \leqslant m$, l'identité suivante :

$$f_m(n) = -\frac{(n-1)!}{\lambda^n} p_m^{(\lambda)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

11. Établir une identité analogue pour $n > m \geqslant 0$ et en déduire le signe de $f_m(n)$ pour tout $n \geqslant 1$.

12. Montrer que la fonction Δf_m est négative sur $\mathbb{N} \setminus \{0, m\}$.

Indication : on distinguera les cas $1 \leqslant n < m$ *et* $n > m \geqslant 0$.

13. Établir les identités suivantes :

$$\Delta f_0(0) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}, \; \Delta f_m(m) = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=1}^{m} \frac{k}{m} \frac{\lambda^k}{k!} \right) \text{ pour } m > 0.$$

14. En déduire que

$$\sup_{n \geqslant 1} \Delta f_m(n) \leqslant \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

On étudie maintenant le cas général. On définit la fonction h_+ par

$$h_+(n) = h(n) - \inf_{k \in \mathbb{N}} h(k).$$

15. Montrer que $S_h = S_{h_+}$.

16. Montrer que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_+(m) f_m(n)$$

est convergente pour tout entier $n \geqslant 1$.

17. Montrer que la fonction f définie, pour tout $n \geqslant 1$, par

$$f(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h_+(m) f_m(n),$$

appartient à S_h.

18. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$f(n+1) - f(n) \leqslant \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sup_{k\in\mathbb{N}} h(k) - \inf_{k\in\mathbb{N}} h(k) \right).$$

En utilisant $-f$ et $h_- = \sup_{k\in\mathbb{N}} h(k) - h$, on prouverait de façon analogue que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$-(f(n+1) - f(n)) \leqslant \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sup_{k\in\mathbb{N}} h(k) - \inf_{k\in\mathbb{N}} h(k) \right),$$

et qu'ainsi l'inégalité (5) est vraie dans le cas général.

V. Application probabiliste

On considère $(X_k, k = 1, \cdots, n)$ une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes. On suppose que pour tout entier $k \in \{1, \cdots, n\}$, X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $r_k \in]0,1]$:

$$\mathbb{P}(X_k = 1) = r_k = 1 - \mathbb{P}(X_k = 0).$$

On pose $\lambda = \sum_{k=1}^{n} r_k$ ainsi que

$$S = \sum_{k=1}^{n} X_k \text{ et pour tout } k \in \{1, \cdots, m\},\ W_k = S - X_k.$$

On identifie la loi de la variable aléatoire S et l'élément $(\mathbb{P}(S = k), k \in \mathbb{N})$ de $\mathcal{P}$, l'ensemble défini au début de ce texte.

19. Pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, pour tout $f \in \mathcal{F}$, montrer que

$$X_k f(S) = X_k f(W_k + 1) \text{ et que } \mathbb{E}(f(W_k)X_k) = r_k \mathbb{E}(f(W_k)).$$

20. Soit $h \in \mathcal{F}$ et $f \in S_h$, établir l'identité.

$$\mathbb{E}(\lambda f(S+1) - Sf(S)) = \sum_{k=1}^{n} r_k \mathbb{E}\left(X_k(f(W_k+2) - f(W_k+1))\right).$$

21. Établir que

$$\operatorname{dist}(\operatorname{loi}(S), P_\lambda) = \sup_{A\subset\mathbb{N}} \left|\mathbb{E}(\lambda f_A(S+1) - Sf_A(S))\right|,$$

où f_A est un élément de $S_{\mathbf{1}_A}$.

22. En déduire que

$$\operatorname{dist}(\operatorname{loi}(S), P_\lambda) \leqslant \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k=1}^{n} r_k^2.$$

Le corrigé commenté

I. Préliminaires

1. Calculons la somme des termes de cette série :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c\frac{\lambda^n}{n!} = c\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = ce^{\lambda}$$

En effet, on reconnaît la somme de la série entière de l'exponentielle, dont le rayon de convergence est infini, donc la convergence a lieu indépendamment de la valeur de λ.
Comme on veut que cette somme vaille 1, on obtient $ce^{\lambda} = 1$. Donc

$$c = e^{-\lambda}$$

Commentaires

– Le terme $\dfrac{\lambda^n}{n!}$ est caractéristique d'une loi de Poisson. On sait que si X suit une loi de Poisson de paramètre λ, alors

$$P(X = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

ce qui corrobore la valeur de c trouvée.

– On peut également constater que si on va lire un peu plus loin dans l'énoncé, au début de la partie II, on nous donne une suite $(p_n^{(\lambda)})_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à $\mathcal{P}$ telle que

$$p_n^{(\lambda)} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}.$$

Il ne fait alors plus aucun doute que la valeur de c à trouver est $e^{-\lambda}$.

2. Soit p et q deux réels de $[0, 1]$. Par définition :

$$\operatorname{dist}\left((1-p, p, 0, \cdots), (1-q, q, 0, \cdots)\right) = \sup_{A\subset\mathbb{N}} \left|\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_A(n)p_n - \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_A(n)q_n\right|$$

avec $p_0 = 1 - p$, $p_1 = p$ et $p_n = 0$ dès que $n \geqslant 2$.
De même $q_0 = 1 - q$, $q_1 = q$ et $q_n = 0$ dès que $n \geqslant 2$. On a donc

$$\begin{aligned}
&\operatorname{dist}\left((1-p, p, 0, \cdots), (1-q, q, 0, \cdots)\right)\\
&= \sup_{A\subset\mathbb{N}} |\mathbf{1}_A(0)(1-p) + \mathbf{1}_A(1)p - \mathbf{1}_A(0)(1-q) - \mathbf{1}_A(1)q|\\
&= \sup_{A\subset\{0,1\}} |\mathbf{1}_A(0)(q-p) + \mathbf{1}_A(1)(p-q)|
\end{aligned}$$

En effet, on peut se contenter de prendre le sup sur les parties de $\{0,1\}$ puisqu'on constate dans la formule que seuls $\mathbf{1}_A(0)$ et $\mathbf{1}_A(1)$ interviennent.
On constate d'ailleurs, que comme le sup est désormais pris sur un nombre fini de parties de $\mathbb{N}$, c'est un max (il est atteint).
Il existe 4 parties de $\{0,1\}$:

- $A=\emptyset$, qui donne $|0\times(q-p)+0\times(p-q)|=0$.
- $A=\{0,1\}$, qui donne $|1\times(q-p)+1\times(p-q)|=0$.
- $A=\{0\}$, qui donne $|1\times(q-p)+0\times(p-q)|=|p-q|$.
- $A=\{1\}$, qui donne $|0\times(q-p)+1\times(p-q)|=|p-q|$.

Par conséquent :

$$\operatorname{dist}\left((1-p,p,0,\cdots),(1-q,q,0,\cdots)\right)=\max(0,0,|p-q,|p-q|)=|p-q|$$

Commentaires

- Attention, ici on ne peut pas se contenter d'utiliser l'inégalité triangulaire pour majorer la valeur absolue de la somme par la somme des valeurs absolues.
  Si par exemple on majore $|\mathbf{1}_A(0)(q-p)+\mathbf{1}_A(1)(p-q)|$ par $|\mathbf{1}_A(0)(q-p)|+|\mathbf{1}_A(1)(p-q)|$, rien ne nous garantit que ce majorant sera atteint (et d'ailleurs il ne le sera pas, d'après le résultat trouvé, sauf dans le cas $p=q$).
- On veut obtenir la valeur du sup, et dans ce cas précis, le fait qu'il n'y ait qu'un nombre fini de parties de $\mathbb{N}$ à considérer nous conduit naturellement à calculer la valeur pour chacune des parties de $\mathbb{N}$ et de prendre ensuite le maximum de toutes ces valeurs.
- On aurait pu utiliser la première formule et travailler directement avec les ensembles plutôt qu'avec les fonctions indicatrices. Il suffit dans ce cas de calculer $P(A)-Q(A)$ pour une partie quelconque de $\mathbb{N}$ et d'envisager les 4 cas de figure selon que 0 et 1 appartiennent ou pas à A.

3. f étant bornée, on peut écrire :

$$\exists K\in\mathbb{R}^+,\ \forall n\in\mathbb{N},\ |f(n)|\leqslant K.$$

Soit maintenant $n\in\mathbb{N}$, alors

$$\sum_{k=0}^{n}|f(n)p_n|\leqslant\sum_{k=0}^{n}Kp_n\leqslant K\sum_{k=0}^{n}p_n\leqslant K\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty}p_n}_{=1}\leqslant K$$

La série de terme général $f(n)p_n$ est donc absolument convergente puisque les sommes partielles de sa valeur absolue sont majorées par une constante.
Comme la convergence absolue d'une série réelle implique la convergence, la série de terme général $f(n)p_n$ est convergente.

Commentaires

Il existe de multiples façon de répondre à cette question. On pourrait par exemple utiliser les relations de comparaison. Comme f est bornée, on peut écrire :

$$f(n) = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(1) \Rightarrow f(n)p_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(p_n).$$

Alors, d'après le cours $f(n)p_n$ est le terme général d'une série absolument convergente, car il est dominé par le terme général d'une série positive convergente.

II. Caractérisation

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} kf(k)p_k^{(\lambda)} &= \sum_{k=0}^{n} kf(k)e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\\ &= \sum_{k=1}^{n} f(k)e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}\\ &= \lambda\sum_{k=1}^{n} f(k)e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\end{aligned}$$

En effectuant le changement d'indice $\ell = k-1$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} kf(k)p_k^{(\lambda)} = \lambda\sum_{\ell=0}^{n-1} f(\ell+1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^\ell}{\ell!}$$

Or, f étant bornée, $n \mapsto f(n+1)$ est également bornée, donc le membre de droite converge d'après la question 3. On en déduit que le membre de gauche est également convergent, donc que la série de terme général $nf(n)p_n^{(\lambda)}$ converge.

Commentaires

– En fait, la convergence est ici encore une convergence absolue : on peut réécrire les égalités précédentes en passant les termes des sommes à la valeur absolue.

– On voit que la question suivante est le prolongement de celle-ci puisqu'on aura simplement à passer à la limite l'égalité précédente. D'ailleurs l'énoncé de la question suivante peut servir à nous mettre sur la voie si on ne sait pas comment aborder la question 4.

– Une autre façon de procéder, très générale et très classique, pour prouver la convergence absolue d'une série $\sum a_n$, , consiste à prouver que

$n^2 a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ pour en déduire que $a_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et donc que $\sum a_n$ converge absolument par comparaison à une série de Riemann convergente. Cette technique est tout-à-fait utilisable ici, même si les calculs effectués dans la réponse donnée permettent de prendre un peu d'avance sur la question suivante.

5. On passe à la limite $n \to +\infty$ l'égalité

$$\sum_{k=0}^{n} k f(k) p_k^{(\lambda)} = \lambda \sum_{\ell=0}^{n-1} f(\ell+1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^\ell}{\ell!}$$

obtenue à la question 4. On peut passer à la limite puisqu'on a déjà justifié la convergence à la question 4. On obtient alors (en renommant n les indices) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n f(n) p_n^{(\lambda)} = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} f(n+1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n f(n) p_n^{(\lambda)} = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} f(n+1) p_n^{(\lambda)}$$

6. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. En appliquant l'identité en question avec $f = \mathbf{1}_{\{m\}}$ (la fonction indicatrice du singleton $\{m\}$), on obtient :

$$\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \delta_{m,n+1} q_n = \sum_{n=0}^{+\infty} n \delta_{m,n} q_n$$

où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker. On a alors

$$\lambda q_{m-1} = m q_m$$

et donc on a la relation de récurrence pour $m \geqslant 1$:

$$q_m = \frac{\lambda}{m} q_{m-1}.$$

Ainsi, en posant $c = q_0 \in \mathbb{R}$, il vient :

$$q_1 = c\frac{\lambda}{1}; \qquad q_2 = c\frac{\lambda^2}{1\times 2}; \qquad q_3 = c\frac{\lambda^3}{1\times 2\times 3}$$

Une récurrence immédiate donne $q_n = c\dfrac{\lambda^n}{n!}$.

Enfin, on sait d'après la question 1, que la condition $Q \in \mathcal{P}$ impose $c = e^{-\lambda}$. Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ q_n = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

et donc $Q = P_\lambda$.