Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.

Les problèmes I et II sont indépendants.

Problème I

$(E, +, .)$ désigne un espace vectoriel réel de dimension 3, $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ désigne une base de E.

Considérons l'endomorphisme u de E défini par : $Mat\,(u, \mathcal{B}) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$,

matrice que nous noterons A dans tout le problème.

1) Diagonalisation de u

a) Déterminer les valeurs propres de u.
Ce résultat suffit-il à assurer la diagonalisabilité de u ? *Votre réponse sera justifiée.*

b) Pour chaque valeur propre de u, déterminer une base du sous-espace propre associé.

c) En déduire que u est diagonalisable.

d) Déterminer une base $\mathcal{B}' = \left(\overrightarrow{e'_1}, \overrightarrow{e'_2}, \overrightarrow{e'_3}\right)$ de E telle que la matrice de u dans cette nouvelle base $\mathcal{B}'$ soit $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Recherche des « racines carrées » de u

a) On suppose qu'il existe un endomorphisme v de E tel que : $v \circ v = u$.

i) Montrer que : $u \circ v = v \circ u$.

ii) Montrer que : $u\left(v\left(\overrightarrow{e'_1}\right)\right) = -2v\left(\overrightarrow{e'_1}\right)$. En déduire que $v\left(\overrightarrow{e'_1}\right)$ et $\overrightarrow{e'_1}$ sont colinéaires, puis que $\overrightarrow{e'_1}$ est un vecteur propre de v.

iii) $\overrightarrow{x}$ désigne un vecteur propre de u associé à la valeur propre 1.
Montrer que : $u\left(v\left(\overrightarrow{x}\right)\right) = v\left(\overrightarrow{x}\right)$, puis en déduire que $v\left(\overrightarrow{x}\right)$ appartient à $\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{e'_2}, \overrightarrow{e'_3}\right)$.

iv) En déduire qu'il existe des réels a, x, y, z, t tels que l'on ait l'égalité : $Mat\,(v, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & z & t \end{pmatrix}$.

v) Montrer que : $(Mat\,(v, \mathcal{B}'))^2 = Mat\,(u, \mathcal{B}')$, et en déduire que : $a^2 = -2$.

b) Existe-t-il des endomorphismes v de E tels que $v \circ v = u$? *Votre réponse sera justifiée.*

3) Construction d'une base de E dans laquelle la matrice de u est de diagonale nulle

Nous constatons que la somme des éléments diagonaux de A est nulle, et nous nous proposons de montrer que A est semblable à une matrice dont tous les éléments diagonaux sont nuls.

a) Mettons en place notre premier changement de base.

i) Montrer que la famille $(\overrightarrow{e_1}, u\,(\overrightarrow{e_1}))$ est libre.

ii) Montrer qu'un vecteur $\overrightarrow{x}$ de composantes (a, b, c) dans la base $\mathcal{B}$ appartient à Vect $(\overrightarrow{e_1}, u\,(\overrightarrow{e_1}))$ si, et seulement si : $4b - c = 0$.
En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que la famille $(\overrightarrow{e_1}, u\,(\overrightarrow{e_1})\,, \overrightarrow{x})$ soit une base de E.

Dans la suite du problème, $\overrightarrow{e_3''}$ *est le vecteur de composantes* $(1, 1, 1)$ *dans la base* $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}''$ *est la famille* $\left(\overrightarrow{e_1}, u\,(\overrightarrow{e_1})\,, \overrightarrow{e_3''}\right)$.

iii) Justifier que $\mathcal{B}''$ est une base de E.

iv) Écrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}''$ et calculer P^{-1}.
Calculer alors la matrice de u dans la base $\mathcal{B}''$.
La matrice obtenue est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 1 & \gamma & \delta \\ 0 & \lambda & \mu \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu$ *réels, et sera notée dans la suite du problème* A''.

b) Considérons la base canonique de $\mathbf{R}^2$ notée $\mathcal{C} = ((1, 0), (0, 1))$, et considérons l'endomorphisme f de $\mathbf{R}^2$ défini par :

$$Mat(f, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \lambda & \mu \end{pmatrix},$$

les valeurs de $\gamma, \delta, \lambda, \mu$ sont celles calculées à la question précédente.

i) Montrer que la famille $\mathcal{C}' = ((0, 1), f((0, 1)))$ est une base de $\mathbf{R}^2$, et écrire la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$.

ii) Calculer alors la matrice de f dans cette nouvelle base $\mathcal{C}'$.

c) En notant la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$ de la façon suivante : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, a, b, c, d réels calculés précédemment, définissons alors la matrice R par :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}.$$

i) Montrer que R est inversible et calculer R^{-1}.

ii) Calculer $R^{-1} A'' R$.

d) En déduire que A est semblable à une matrice dont les éléments diagonaux sont tous nuls.

Problème II : Développement asymptotique d'une somme de Riemann.

f étant une fonction continue sur le segment $[0,1]$ à valeurs réelles, nous noterons pour tout entier naturel non nul n : $S_n(f) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Quelle est la limite de la suite $(S_n(f))$? *Aucune démonstration n'est attendue.*

1) Application

Considérons la suite u définie par : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n}$, et la suite v définie par : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}$.

a) Écrire un algorithme qui, pour un entier naturel non nul n donné, calcule la valeur de u_n.

b) Montrer que la suite u est convergente et préciser sa limite.

c) Montrer que pour tout entier naturel non nul n : $v_n + \dfrac{1}{2}u_n = u_{2n}$.

d) Montrer alors que la suite v converge vers $\dfrac{1}{2}\ln(2)$.

2) Développement asymptotique d'une somme de Riemann

Dans cette partie, f désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le segment $[0,1]$ et à valeurs réelles.

a) Justifier l'existence d'un réel positif M tel que : $\forall x \in [0,1]$, $\left| f^{(3)}(x) \right| \leq M$.

b) Soit n un entier naturel non nul, k un entier naturel compris au sens large entre 0 et $n-1$, t un réel appartenant à $\left[\dfrac{k}{n}, \dfrac{k+1}{n}\right]$.

i) À l'aide de la formule de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction f de classe $\mathcal{C}^3$ sur l'intervalle $\left[\dfrac{k}{n}, t\right]$, montrer que :

$$\left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t - \frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(t - \frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{6}\left(t - \frac{k}{n}\right)^3.$$

ii) q étant un entier naturel non nul, quelle est la primitive sur $\mathbf{R}$ de $t \longmapsto \left(t - \dfrac{k}{n}\right)^q$ qui s'annule en $\dfrac{k}{n}$?

iii) Par intégration entre $\dfrac{k}{n}$ et $\dfrac{k+1}{n}$, montrer que :

$$\left| \left(\int_{k/n}^{k+1/n} f(t)\,\mathrm{d}t \right) - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2} f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{6n^3} f''\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{24n^4}.$$

c) n désigne un entier naturel non nul.

En sommant les inégalités obtenues en 2) b) iii), montrer que :

$$\left| \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - S_n(f) - \frac{1}{2n}S_n(f') - \frac{1}{6n^2}S_n(f'') \right| \leq \frac{M}{24n^3}.$$

d) Définissons la suite (ε_n) par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \varepsilon_n = n^2 \left(S_n(f) + \frac{1}{2n}S_n(f') + \frac{1}{6n^2}S_n(f'') - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \right).$$

Montrer que la suite (ε_n) converge vers 0 et que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ S_n(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2n}S_n(f') - \frac{1}{6n^2}S_n(f'') + \frac{\varepsilon_n}{n^2}.$$

e) Justifier l'existence de deux suites (ε'_n) et (ε''_n) de limite nulle telles que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ S_n(f') = \int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2n}S_n(f'') + \frac{\varepsilon'_n}{n},$$

et :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ S_n(f'') = \int_0^1 f''(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon''_n.$$

f) En déduire l'existence d'une suite (δ_n) de limite nulle telle que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ S_n(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{12n^2}\int_0^1 f''(t)\,\mathrm{d}t + \frac{\delta_n}{n^2}.$$

Nous venons de prouver le résultat suivant :

$$S_n(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{12n^2}\int_0^1 f''(t)\,\mathrm{d}t + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

3) Application

Les suites u et v ont été définies à la question 1).

a) Montrer qu'il existe une suite (α_n) de limite nulle telle que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_n = \ln(2) + \frac{1}{4n} + \frac{1}{16n^2} + \frac{\alpha_n}{n^2}.$$

b) En déduire un équivalent simple de $u_n - \ln(2)$ au voisinage de $+\infty$.

c) Montrer que : $v_n - \dfrac{\ln(2)}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{64n^2}$.

d) Comparer la rapidité de convergence des suites u et v.

FIN

Corrigé

Rapport du jury

Dans l'ensemble, les candidats ayant eu le temps de traiter en profondeur les deux problèmes sont rares, mais en traiter un seul très bien suffisait à assurer une très bonne note. Beaucoup de copies sont pénalisées par une absence de rigueur dans le raisonnement mathématique et un net manque de compréhension de la nature des objets manipulés.
Lorsque le résultat est donné (ce qui était le cas de beaucoup de questions), il est attendu une explication claire de ce résultat : il ne faut surtout pas se contenter d'une ou deux lignes donnant ce résultat sans aucune justification. De même, il est inutile de bluffer le correcteur et de forcer les calculs afin d'arriver au résultat attendu si on ne sait pas le faire.
Si dans l'ensemble les copies sont propres, rappelons que mettre en valeur le résultat et aérer les copies ne peut qu'aider à sa compréhension. Enfin, déplorons le fait que l'orthographe soit trop souvent négligée, voire carrément délaissée.

Problème 1

Rapport du jury

Ce problème d'algèbre visait à prouver dans le cas d'une matrice 3×3 donnée le résultat général qui affirme qu'une matrice carrée de trace nulle est semblable à une matrice dont les coefficients diagonaux sont nuls. Somme toute assez classique, sa difficulté résidait essentiellement dans sa longueur et dans les nombreux calculs. Si les calculs matriciels demandent beaucoup de temps, le barème en tient évidemment compte. Si la partie 1 était très classique et a globalement bien été traitée (à part les erreurs de calcul), la partie 2 était moins classique et a dérouté bon nombre de candidats. Dans la partie 3, il était attendu des candidats d'avoir calculé précédemment les valeurs exactes de α, β, γ, δ, λ, μ.

Pour des raisons de simplicité d'écriture, tous les vecteurs seront notés sans flèche.

1) Diagonalisation de u

Rapport du jury

Cette partie était ultra-classique et a globalement été bien traitée, malgré de fréquentes erreurs de calcul. Il fallait toutefois penser à prendre en compte le $1/2$ dans la matrice A. Certains candidats ont d'ailleurs pensé à faire le calcul pour $2A$ et à diviser les valeurs propres par 2 après (ce qu'il faut tout de même justifier).

Rapport du jury

À moins d'être absolument sûr de ses calculs, mieux vaut vérifier au brouillon que les vecteurs propres obtenus en sont bien, cela éviterait de nombreuses erreurs. Comme il n'y avait que deux valeurs propres pour un espace de dimension 3, le fait de vérifier que 1 et -2 étaient valeurs propres ne suffisait pas pour conclure, il fallait absolument faire le calcul. Dans la méthode du pivot il faut absolument écrire clairement les opérations effectuées et s'assurer que celles-ci sont licites. Enfin, dans la dernière question l'argument clé était qu'on obtenait bien une base de E par juxtaposition de bases des sous-espaces propres.

a) Soit $\lambda \in \mathbf{R}$.
Étudions le système (S_λ) représenté matriciellement par :

$$(A-\lambda I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.$$

Le système (S_λ) est successivement équivalent aux systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} (1-2\lambda)x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & (1-2\lambda)y & - & z & = & 0 \\ 4x & - & 4y & - & 2(1+\lambda)z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & (1-2\lambda)y & - & z & = & 0 \\ (1-2\lambda)x & + & y & + & z & = & 0 \\ 4x & - & 4y & - & 2(1+\lambda)z & = & 0 \end{array}\right. \quad L_1 \longleftrightarrow L_2$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & (1-2\lambda)y & - & z & = & 0 \\ & & (1-(1-2\lambda)^2)y & + & (1+(1-2\lambda))z & = & 0 \quad L_2 \longleftarrow L_2-(1-2\lambda)L_1 \\ & & (-4-4(1-2\lambda))y & + & (-2(1+\lambda)+4)z & = & 0 \quad L_3 \longleftarrow L_3-4L_1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & (1-2\lambda)y & - & z & = & 0 \\ & & 4\lambda(1-\lambda)y & + & 2(1-\lambda)z & = & 0 \\ & & 8(\lambda-1)y & + & 2(1-\lambda)z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & (1-2\lambda)y & - & z & = & 0 \\ & & 4\lambda(1-\lambda)y & + & 2(1-\lambda)z & = & 0 \\ & & (\lambda-1)(8+4\lambda)y & & & = & 0 \quad L_3 \longleftarrow L_3-L_2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & z & + & (1-2\lambda)y & = & 0 \\ & & 2(1-\lambda)z & + & 4\lambda(1-\lambda)y & = & 0 \\ & & & & (\lambda-1)(8+4\lambda)y & = & 0 \end{array}\right.$$

Le système triangulaire ci-dessus n'est pas de Cramer si et seulement si l'un de ses coefficients diagonaux est nul.

Bref, le système (S_λ) n'est pas de Cramer si et seulement si $(\lambda-1)(8+4\lambda)=0$.
En résumé, $\boxed{\mathrm{Sp}\,(u)=\{-2,1\}}$.

Le candidat qui a lu dès le départ la question d) a déjà ce résultat en tête.

Comme u est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension 3 et comme u possède 2 valeurs propres distinctes, $\boxed{\text{on ne peut pas savoir immédiatement si } u \text{ est diagonalisable}}$.

b) • Étudions $E_{-2}(u)$.
On a :

$$xe_1+ye_2+ze_3\in E_{-2}(u) \iff \begin{cases} x & - & z & + & 5y & = & 0\\ & & 6z & - & 24y & = & 0\end{cases}$$
$$\iff z=4y \text{ et } x=z-5y=-y.$$

Ainsi, en posant : $\boxed{e'_1=-e_1+e_2+4e_3}$, on a : $E_{-2}(u)=\mathrm{Vect}\,(e'_1)$.
Comme e'_1 n'est pas le vecteur nul, on peut donc dire que (e'_1) est une base de $E_{-2}(u)$.
Par conséquent, on obtient : $\dim E_{-2}(u)=1$.

• Étudions $E_1(u)$.
On a :

$$t=xe_1+ye_2+ze_3\in E_1(u) \iff x-z-y=0$$
$$\iff t=y(e_1+e_2)+z(e_1+e_3).$$

Ainsi, en posant : $\boxed{e'_2=e_1+e_2 \text{ et } e'_3=e_1+e_3}$, on a : $E_1(u)=\mathrm{Vect}\,(e'_2,e'_3)$.
Comme les vecteurs e'_2 et e'_3 ne sont pas colinéaires, on peut donc dire que (e'_2,e'_3) est une base de $E_1(u)$.
Par conséquent, on obtient : $\dim E_1(u)=2$.

Il est important de se rappeler que l'on travaille ici dans un espace E de dimension 3 dont une base est $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$. Tout vecteur t de E s'écrit donc comme une combinaison linéaire de e_1, e_2 et e_3.
Il faut donc être vigilant et ne pas aller trop vite car on risque sinon de travailler dans $\mathbf{R}^3$.

c) D'après ce qui précède, on a :

$$\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,(u)}\dim E_\lambda(u)=3=\dim E.$$

Par conséquent, u est diagonalisable.

d) En juxtaposant les deux bases des deux sous-espaces propres obtenues à la question 1) b), on obtient une base de vecteurs propres de u. Plus précisément, posons $\mathcal{B}'=(e'_1,e'_2,e'_3)$.
Comme $u(e'_1)=-2e'_1$, $u(e'_2)=e'_2$ et $u(e'_3)=e'_3$, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$ est bien la matrice diagonale :

$$\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

2) Recherche des «racines carrées» de u

a) i) L'associativité de la composition conduit à :

$$u \circ v = (v \circ v) \circ v = v \circ (v \circ v) = v \circ u.$$

> Rapport du jury
>
> Probablement la question la plus traitée du problème, la plupart du temps de manière correcte. Toutefois, quelques candidats évoquent la commutativité de la loi de composition alors qu'il s'agissait ici de son associativité.

ii) La commutativité de u et de v qui vient d'être prouvée permet d'écrire :

$$u(v(e_1')) = v(u(e_1')).$$

Mais comme e_1' est un vecteur propre de u associé à la valeur propre -2, on a : $u(e_1') = -2e_1'$.
Par conséquent, il vient :

$$u(v(e_1')) = v(-2e_1') = -2v(e_1').$$

Ceci montre que $v(e_1')$ appartient à $E_{-2}(u)$.
Or, d'après la question 1) b), on sait que (e_1') est une base de $E_{-2}(u)$. Par conséquent, il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que :

$$v(e_1') = ae_1'.$$

Cette égalité montre bien que $v(e_1')$ et e_1' sont colinéaires.
De plus, comme e_1' n'est pas le vecteur nul, cette égalité montre aussi que e_1' est un vecteur propre de v, associé ici à la valeur propre a.

> Rapport du jury
>
> Sachant qu'il existait λ tel que $v\left(\overrightarrow{e_1'}\right) = \lambda\overrightarrow{e_1'}$ il fallait justifier que $\overrightarrow{e_1'}$ était non nul, λ pouvait être nul (0 peut être valeur propre).

iii) La commutativité de u et de v permet d'écrire :

$$u(v(x)) = v(u(x)).$$

Or, x est un vecteur propre de u associé à la valeur propre 1 donc on a :

$$u(x) = x.$$

Ainsi, il vient :

$$u(v(x)) = v(x).$$

Cette égalité montre donc que $v(x)$ appartient à $E_1(u)$.
Or, on a vu à la question 1) b) que $E_1(u) = \mathrm{Vect}\,(e_2', e_3')$.
Finalement, $v(x)$ appartient bien à $\mathrm{Vect}\,(e_2', e_3')$.