

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	La mécanique quantique	1
1.2	Fondements microscopiques de la physique	2
1.2.1	Principes fondamentaux	2
1.2.2	Les quatre interactions fondamentales	4
1.2.3	Les particules stables	6
1.2.4	Lois de conservation	8
1.3	Les systèmes composites	9
1.3.1	Objet de la mécanique quantique	9
1.3.2	Modèle standard	9
1.3.3	Nucléons	10
1.3.4	Noyaux atomiques	11
1.3.5	Atomes	12
1.3.6	Molécules	13
1.4	Mécanique quantique non relativiste	13
1.5	Plan de l'ouvrage	14
	Exercice 1a : Les particules du corps humain	16
	Exercice 1b : Unités de la physique nucléaire	17
	Exercice 1c : Les neutrinos de la supernova SN1987a	18
2	Les origines de la physique quantique	21
2.1	Introduction	21
2.2	La physique microscopique au début du vingtième siècle	22
2.3	Les spectres atomiques	23
2.4	La constante de Planck	26
2.4.1	Le corps noir	26
2.4.2	Quantification du rayonnement électromagnétique	29
2.4.3	Le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène	33
2.5	Particules de lumière - Effet Compton	36
2.6	Ondes de matière	39
2.6.1	Longueur d'onde de de Broglie	39
2.6.2	Deux expériences impliquant les ondes de matières	40
2.7	Dualité onde-particule en mécanique quantique	42
2.7.1	Particule classique - Onde classique	42

2.7.2	Particule-onde quantique	44
2.8	L'équation de Schrödinger	46
2.8.1	Nécessité d'une équation d'onde	46
2.8.2	Particule libre	46
2.8.3	Onde plane	47
2.8.4	Particule soumise à un potentiel	48
	Exercice 2a : Lois de Wien et de Stefan-Boltzmann	50
	Exercice 2b : Energie moyenne quantifiée d'un corps noir	52
	Exercice 2c : Laser hélium-néon	53
	Exercice 2d : Longueur d'onde de Compton d'un positron	54
	Exercice 2e : Variante de quantification de l'atome de Bohr	55
	Exercice 2f : Relations de dispersion	55
3	Outils mathématiques	57
3.1	Introduction	57
3.2	Fonctions de la mécanique quantique	58
3.3	Propriétés des fonctions de carré sommable	59
3.4	Transformation de Fourier	62
3.5	Opérateurs en mécanique quantique	63
3.6	Opérations entre opérateurs et commutateur	66
3.7	Fonctions propres et valeurs propres d'un opérateur	70
3.8	Elément de matrice d'un opérateur	73
3.9	Opérateurs hermitiques	73
3.9.1	Définition	73
3.9.2	Propriétés des valeurs propres et fonctions propres d'un opérateur hermitique	76
3.10	Observables	77
3.10.1	Définition	77
3.10.2	Propriétés des observables qui commutent	78
3.11	Fonction delta de Dirac	79
3.11.1	Définition et propriétés	79
3.11.2	Distribution de Dirac	81
3.11.3	Fonctions propres de l'observable \hat{x}	83
	Exercice 3a : Fonctions de carré sommable	84
	Exercice 3b : Fonctions propres	87
	Exercice 3c : Transformées de Fourier	89
	Exercice 3d : Exponentielle d'opérateur	91
4	Principes de la mécanique quantique	93
4.1	Introduction	93
4.2	Postulats de la mécanique quantique	94
4.2.1	Postulat sur l'état d'un système	94
4.2.2	Postulats sur les mesures	96
4.2.3	Postulat d'évolution	99
4.3	Règle de correspondance	99
4.4	Potentiel indépendant du temps	101

4.4.1	Equation de Schrödinger stationnaire	101
4.4.2	Solution générale pour un spectre discret de H	103
4.5	Principe de superposition	103
4.6	Courant de probabilité	105
4.7	Valeur moyenne et écart quadratique moyen d'une observable	107
4.7.1	Valeur moyenne d'une observable	107
4.7.2	Ecart quadratique moyen	109
4.8	Relations d'incertitude de Heisenberg	109
4.9	Théorème d'Ehrenfest	111
	Exercice 4a : Superposition de deux fonctions d'onde	114
	Exercice 4b : Superposition de deux fonctions d'onde avec des coefficients complexes	120
	Exercice 4c : Fonctions d'onde stationnaires réelles	121
5	Application des postulats à des potentiels simples	123
5.1	Introduction	123
5.2	Etats stationnaires liés	124
5.3	Etats stationnaires libres	125
5.4	Potentiels continus par morceaux	127
5.4.1	Discontinuités de première et deuxième espèce	127
5.4.2	Conséquences d'une discontinuité sur la fonction d'onde	128
5.5	Particule libre	129
5.6	Particule dans une boîte	132
5.6.1	Présentation	132
5.6.2	$E < 0$	133
5.6.3	$E = 0$	133
5.6.4	$E > 0$	134
5.7	Marche de potentiel	136
5.7.1	Présentation	136
5.7.2	$E < 0$	137
5.7.3	$E = 0$	138
5.7.4	$0 < E < V_0$	138
5.7.5	$E = V_0$	140
5.7.6	$E > V_0$	141
5.8	Puits rectangulaire symétrique	142
5.8.1	Présentation	142
5.8.2	$-V_0 < E < 0$	143
5.8.3	$E > 0$	148
5.9	Barrière de potentiel rectangulaire	152
5.9.1	Présentation	152
5.9.2	$0 < E < V_0$	153
5.9.3	$E > V_0$	156
	Exercice 5a : Equivalence des exponentielles imaginaires et des fonctions trigonométriques	158
	Exercice 5b : Marche descendante	158

6	Potentiels réalistes à une dimension	161
6.1	Introduction	161
6.2	Hypothèses sur les potentiels réalistes à une dimension	162
6.3	Potentiel réaliste non confinant	163
6.3.1	Présentation	163
6.3.2	Solutions asymptotiques	164
6.3.3	Discussion qualitative du spectre d'un hamiltonien	166
6.4	Potentiel réaliste confinant	172
6.5	Propriétés générales de l'équation de Schrödinger	173
6.5.1	Théorème du wronskien	173
6.5.2	Non dégénérescence des énergies des états liés	174
6.5.3	Orthogonalité de fonctions d'onde d'énergies différentes	175
6.5.4	Borne inférieure de l'énergie	176
6.5.5	Existence d'un état lié - Nombre d'états liés	177
6.5.6	Nombre de nœuds d'une fonction d'onde d'un état lié	178
6.5.7	Parité d'un état lié pour un potentiel pair	179
6.6	Traversée d'une barrière de potentiel quelconque et effet tunnel	180
6.6.1	Probabilité de transmission à l'approximation WKB	180
6.6.2	Traversée d'une barrière purement coulombienne	184
6.6.3	Deux applications en physique nucléaire	186
6.6.4	Le microscope à effet tunnel	190
6.7	Résonances	190
	Exercice 6a : Potentiel en $1/\cos^2(x)$	192
	Exercice 6b : Potentiel de Pöschl-Teller	196
	Exercice 6c : Approximation WKB de la barrière rectangulaire	200
	Exercice 6d : Potentiel $\delta(x)$ attractif	202
7	Paquets d'ondes	205
7.1	Introduction	205
7.2	Paquet d'ondes à une dimension	205
7.3	Paquet d'ondes libre à une dimension	209
7.4	Paquet d'ondes libre gaussien	211
7.5	Approximation au premier ordre de la phase	216
7.6	Marche de potentiel	219
7.6.1	$0 < E < V_0$	220
7.6.2	$E > V_0$	225
7.7	Paquet d'ondes à trois dimensions	229
	Exercice 7a : Superposition de trois ondes	231
	Exercice 7b : Loi de Laplace-Gauss et grandeurs quantiques	233
	Exercice 7c : Développement au premier ordre de la phase	235
	Exercice 7d : Paquet d'ondes libre gaussien à trois dimensions	237
	Exercice 7e : Ordres de grandeur de l'étalement d'un paquet d'ondes	239

8	Moment cinétique orbital	241
8.1	Définition du moment cinétique orbital	241
8.2	Relations de commutation	243
8.3	Opérateur carré du moment cinétique orbital	244
8.4	Coordonnées sphériques	245
8.5	Moment cinétique orbital en coordonnées sphériques	247
8.6	Quantification du moment cinétique orbital	249
8.7	Harmoniques sphériques	254
	Exercice 8a : Relations de commutation	258
	Exercice 8b : Laplacien en coordonnées sphériques	259
	Exercice 8c : Opérateurs L_+ et L_-	261
9	Particule dans un potentiel central	265
9.1	Potentiel central	265
9.2	Equation de Schrödinger en coordonnées sphériques	266
9.3	Séparation des variables angulaires	267
9.4	Propriétés des solutions de l'équation radiale	270
	9.4.1 Hypothèses sur le potentiel	270
	9.4.2 Comportement des fonctions radiales à l'origine	272
	9.4.3 Comportement des fonctions radiales à l'infini	273
9.5	Propriétés des fonctions radiales d'un potentiel central	275
	9.5.1 Propriétés générales des fonctions radiales	275
	9.5.2 Nombre de nœuds radiaux	278
	9.5.3 Spectre lié et spectre continu	279
	9.5.4 Dégénérescence essentielle	280
	9.5.5 Fonctions radiales	281
9.6	Parité	282
9.7	Potentiels particuliers	284
	9.7.1 Particule dans une cavité sphérique impénétrable	284
	9.7.2 Potentiel de Hulthén	287
	Exercice 9a : Puits rectangulaire	293
	Exercice 9b : Potentiel de Morse	298
10	L'atome d'hydrogène	305
10.1	Introduction	305
10.2	Potentiel coulombien attractif	306
	10.2.1 Equation de Schrödinger et choix d'unités	306
	10.2.2 Résolution des équations radiales	308
	10.2.3 Fonctions d'onde	311
10.3	Equation de Schrödinger d'un système de N particules	313
10.4	Interprétation de la fonction d'onde de plusieurs particules	315
10.5	Système de deux particules	316
10.6	Atome d'hydrogène	320
10.7	Systèmes hydrogénoïdes	321
10.8	Etats de Rydberg	322

Exercice 10a : Masse de l'atome d'hydrogène	324
Exercice 10b : La découverte du deutérium	324
Exercice 10c : Rayons de l'état fondamental d'un atome hydrogénoïde . . .	325
Exercice 10d : Théorème du viriel et vitesse de l'électron	327
Exercice 10e : Normalisation des fonctions d'onde de l'atome d'hydrogène .	330
11 Oscillateurs harmoniques	335
11.1 Introduction	335
11.2 Oscillateur harmonique à une dimension	336
11.2.1 Hamiltonien et système d'unités	336
11.2.2 Résolution de l'équation de Schrödinger	337
11.2.3 Opérateurs de création et d'annihilation	342
11.2.4 Quantification avec a et a^\dagger	343
11.3 Oscillateur harmonique à deux dimensions	347
11.3.1 Coordonnées cartésiennes	347
11.3.2 Coordonnées polaires	350
11.3.3 Comparaison des fonctions d'onde	354
11.4 Oscillateur harmonique à d dimensions	355
Exercice 11a : Théorème du viriel	357
Exercice 11b : Oscillateur harmonique à trois dimensions	359
Exercice 11c : Spectre de vibration d'une molécule diatomique	362
Exercice 11d : Paquet d'ondes lié	365
Exercice 11e : Normalisation des fonctions d'onde à une dimension	368
12 Le spin	371
12.1 Introduction	371
12.2 Fonction hamiltonienne dans un champ magnétique	372
12.3 Opérateur hamiltonien dans un champ magnétique	374
12.4 Effet Zeeman normal et anormal	377
12.5 Expérience de Stern et Gerlach	379
12.6 Spin $1/2$	380
12.7 Définition et propriétés générales d'un moment cinétique	384
12.8 Composition de deux spins $1/2$	386
12.9 Composition de deux moments cinétiques	391
12.10 Moment cinétique total d'un système	393
12.11 Moment cinétique total d'un électron	394
12.12 Structure fine de l'atome d'hydrogène	395
12.13 Structure hyperfine de l'atome d'hydrogène	399
12.14 Bosons et fermions	400
Exercice 12a : Interprétation naïve du spin	402
Exercice 12b : Particule chargée dans un champ magnétique uniforme . . .	403
Exercice 12c : Spin d'orientation quelconque	405
Exercice 12d : Spin 1	408
Exercice 12e : Spineurs sphériques	410

13 Difficultés d'interprétation de la mécanique quantique	415
13.1 Introduction	415
13.2 Que représente la fonction d'onde?	416
13.3 Le rôle de l'observateur	417
13.3.1 Le postulat de réduction de la fonction d'onde	417
13.3.2 Les types de mesures	417
13.3.3 La nature de l'observateur	417
13.3.4 Frontière entre système observé et observateur	418
13.4 Le chat de Schrödinger et les ordinateurs quantiques	418
13.4.1 Expérience par la pensée de Schrödinger	418
13.4.2 Ordinateurs quantiques	420
13.4.3 La décohérence	421
13.4.4 Expériences avec des "chats de Schrödinger" très simplifiés	421
13.5 Les inégalités de Bell	422
13.5.1 L'article EPR	422
13.5.2 L'hypothèse des variables cachées	422
13.5.3 Les curieuses propriétés d'une fonction d'onde de deux particules de spin $1/2$	424
13.5.4 Une explication par des variables cachées?	426
13.5.5 Inégalités de Wigner	427
13.5.6 Inégalités de Bell	429
13.5.7 Théorème de Bell	432
13.5.8 Vérifications expérimentales	432
13.6 L'onde pilote	433
13.7 Que conclure?	435
Exercice 13a : Propriétés d'un état de spin total 0 de deux particules de spin $1/2$	436
Exercice 13b : Probabilités de mesures des orientations des spins	437
Exercice 13c : Valeur moyenne de mesures des orientations des spins	439
Exercice 13d : Potentiel quantique de l'onde pilote	440
14 Mécanique quantique relativiste	445
14.1 Introduction	445
14.2 Quelques notions de relativité restreinte	446
14.2.1 Cinématique relativiste et transformations de Lorentz	446
14.2.2 Dynamique classique relativiste	448
14.3 Equation de Klein-Gordon	450
14.3.1 Règle de correspondance dans le cas relativiste	450
14.3.2 Equation de Klein-Gordon d'une particule libre	450
14.3.3 Fonction d'onde libre	451
14.3.4 Densité et courant de probabilité	451
14.3.5 Interprétation des solutions de l'équation de Klein-Gordon	453
14.3.6 Particule en interaction	454
14.4 Equation de Dirac	455
14.4.1 Equation de Dirac d'une particule libre	455

14.4.2	Spineurs de Dirac d'une particule libre	457
14.4.3	Densité et courant de probabilité	459
14.4.4	Particule en interaction	460
14.4.5	Limite non relativiste de l'équation de Dirac	460
14.4.6	Spectre relativiste des atomes hydrogénoïdes	462
14.4.7	Mer de Dirac et création de paires	468
14.5	Conclusion	469
	Exercice 14a : Particule scalaire dans un potentiel coulombien	471
	Exercice 14b : Equation relativiste à une dimension	474
	Exercice 14c : Marche de potentiel et paradoxe de Klein	475
	Exercice 14d : Commutation du moment cinétique avec H_D	479
Compléments mathématiques		481
C1	Fonction d'une variable réelle	481
	C1.1 Définitions	481
	C1.2 Interprétation géométrique des dérivées	482
C2	Equations et problèmes différentiels	483
C3	Problèmes auto-adjoints	485
C4	Points singuliers	486
C5	Fonctions élémentaires	487
	C5.1 Exponentielle et logarithme	487
	C5.2 Fonctions trigonométriques	489
	C5.3 Fonctions hyperboliques	491
C6	Fonction gamma d'Euler	492
C7	Polynômes orthogonaux	493
	C7.1 Généralités	493
	C7.2 Polynômes de Legendre	494
	C7.3 Polynômes d'Hermite	496
	C7.4 Polynômes de Laguerre	497
C8	Fonctions de Bessel sphériques	499
C9	Fonction hypergéométrique confluyente	500
C10	Equations et problèmes aux dérivées partielles	501
C11	Méthode de séparation des variables	502
C12	Espace de Hilbert	503
Conseils de lecture		505
Index		507