

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction aux signaux aléatoires</b>	<b>9</b>
1.1	Historique . . . . .	9
1.2	Exemples de signaux aléatoires . . . . .	13
1.2.1	Marche aléatoire ou suite infinie de piles ou faces . . . . .	13
1.2.2	File d'attente à un péage d'autoroute . . . . .	16
1.2.3	Erreur de mesures . . . . .	20
1.2.4	Système de communication . . . . .	21
1.3	Modélisation des signaux aléatoires . . . . .	23
1.3.1	Introduction . . . . .	23
1.3.2	Définition formelle . . . . .	25
1.3.3	Caractérisation des signaux temporels . . . . .	25
1.3.4	Stationnarité . . . . .	27
1.3.5	Ergodicité . . . . .	27
1.4	Signaux stationnaires au sens large . . . . .	32
1.4.1	Propriétés des fonctions d'autocorrélation et d'autocovariance . . . . .	32
1.4.2	Densité spectrale de puissance . . . . .	35
1.4.3	Filtrage des signaux stationnaires au sens large . . . . .	39
1.5	Signaux gaussiens . . . . .	43
1.5.1	Définition . . . . .	43
1.5.2	Rappels sur les vecteurs aléatoires gaussiens . . . . .	44
1.5.3	Importance des lois gaussiennes dans la nature . . . . .	46
1.6	Signaux AR, MA et ARMA . . . . .	48
1.6.1	Bruits blancs . . . . .	48
1.6.2	Signal autorégressif . . . . .	50
1.6.3	Signal à moyenne ajustée . . . . .	52
1.6.4	Signal autorégressif à moyenne ajustée . . . . .	53
<b>2</b>	<b>Notion d'estimation</b>	<b>55</b>
2.1	Introduction . . . . .	55
2.2	Éléments d'estimation bayésienne . . . . .	58

2.2.1	Quelle est l'influence de la fonction coût ? . . . . .	58
2.2.2	L'espace de Hilbert des VA du deuxième ordre . . . . .	60
2.2.3	Estimation affine en moyenne quadratique . . . . .	63
2.2.4	Estimation en moyenne quadratique . . . . .	65
2.2.5	Estimation en moyenne quadratique avec contrainte linéaire . . . . .	68
2.3	Éléments d'estimation non bayésienne . . . . .	69
2.3.1	Inégalité de Cramer-Rao . . . . .	69
2.3.2	Méthode du maximum de vraisemblance . . . . .	70
2.4	Comparaison des différents estimateurs sur un exemple . . . . .	71
2.4.1	Estimation du pauvre, méthode des moindres carrés . . . . .	72
2.4.2	Connaissance du bruit au second ordre . . . . .	72
2.4.3	Connaissance complète du bruit . . . . .	73
2.4.4	Point de vue bayésien . . . . .	74
2.5	Exemple d'estimation quadratique . . . . .	74
<b>3</b>	<b>Filtrage linéaire statistique</b>	<b>79</b>
3.1	Filtrage de Wiener . . . . .	79
3.1.1	Préliminaires . . . . .	79
3.1.2	Filtrage de Wiener sans contrainte . . . . .	81
3.1.3	Filtrage de Wiener avec contrainte linéaire . . . . .	83
3.1.4	Filtrage de Wiener causal . . . . .	87
3.2	Prédiction à un pas et passé infini . . . . .	89
3.2.1	Préliminaire, l'espace $H^2$ . . . . .	89
3.2.2	Cas d'un signal dont la DSP est bornée et admet une factorisation forte . . . . .	89
3.2.3	Cas d'un signal autorégressif d'ordre $r$ . . . . .	95
3.2.4	Cas général, décomposition de Wold . . . . .	96
3.3	Prédiction à un pas et passé fini . . . . .	101
3.3.1	Équations de Yule-Walker . . . . .	101
3.3.2	Relation entre $\hat{x}_{r+1}(n)$ et $\hat{x}_r(n)$ . . . . .	102
3.3.3	Algorithme de Levinson . . . . .	104
3.3.4	Diagramme de fluence des prédictions avant et arrière . . . . .	106
3.3.5	Condition de stabilité d'un filtre en treillis . . . . .	107
<b>4</b>	<b>Méthodes récursives dans le temps</b>	<b>111</b>
4.1	Introduction . . . . .	111
4.1.1	Lemme d'inversion matricielle . . . . .	113
4.2	Méthode des moindres carrés récursifs . . . . .	114
4.3	Méthode des moindres carrés adaptatifs . . . . .	116
4.4	Filtrage de Kalman . . . . .	117

4.4.1	Les données du problème . . . . .	117
4.4.2	Filtre de Kalman standard . . . . .	119
4.4.3	Filtre de Kalman du prédicteur à un pas . . . . .	119
4.4.4	Équations de Kalman quand les bruits d'état et de mesure sont décorrélés . . . . .	123
4.4.5	Formulation compacte des équations de Kalman . . . . .	124
4.4.6	Autre formulation des équations de Kalman . . . . .	125
4.4.7	Filtrage de Kalman étendu . . . . .	127
4.4.8	Estimation des coefficients d'un filtre ARMA . . . . .	129
<b>5</b>	<b>Détection</b>	<b>131</b>
5.1	Test des hypothèses . . . . .	131
5.1.1	Introduction . . . . .	131
5.1.2	Théorie bayésienne, cas de $p$ hypothèses . . . . .	132
5.1.3	Théorie bayésienne dans le cas de deux hypothèses . . . . .	134
5.1.4	Stratégie de Neyman-Pearson . . . . .	136
5.1.5	Propriétés élémentaires du rapport de vraisemblance . . . . .	137
5.1.6	Courbe COR et performance des détecteurs à seuil . . . . .	138
5.2	Application à la détection d'un signal dans un bruit . . . . .	140
5.2.1	Introduction . . . . .	140
5.2.2	Détection d'un signal déterministe dans un bruit gaussien . . . . .	143
5.2.3	Propriétés du filtre adapté . . . . .	145
5.2.4	Filtre adapté à temps continu . . . . .	147
5.2.5	Filtre à déflexion maximale . . . . .	147
<b>A</b>	<b>Matrices proches de Toeplitz et algorithme de Levinson-Szegö généralisé</b>	<b>149</b>
A.1	Matrices proches de Toeplitz . . . . .	149
A.2	Localisation des zéros d'un polynôme dans le plan complexe . . . . .	157
A.2.1	Résultant de Bézout de deux polynômes . . . . .	158
A.2.2	Localisation des zéros d'un polynôme dans le plan complexe . . . . .	160
A.3	Algorithme de Levinson-Szegö généralisé . . . . .	162
<b>B</b>	<b>Équations de Chandrasekhar</b>	<b>165</b>
B.1	Démonstration des équations de Chandrasekhar . . . . .	165
B.2	Les données du problème . . . . .	165
B.3	Formes 1 et 2 des équations de Chandrasekhar . . . . .	165
B.4	Autres formes des équations de Chandrasekhar . . . . .	167

<b>C</b>	<b>Fonction caractéristique, loi et espérance conditionnelle</b>	<b>171</b>
C.1	Fonction caractéristique . . . . .	171
C.2	Loi et espérance conditionnelle . . . . .	173
C.2.1	Espérance conditionnelle de VA du deuxième ordre . . .	173
C.2.2	Densité de probabilité conditionnelle . . . . .	176
<b>D</b>	<b>Annales d'examens</b>	<b>177</b>
D.1	Estimation et détection dans un bruit multiplicatif gaussien . .	177
D.2	Estimation en moyenne quadratique . . . . .	181
D.3	Estimation quadratique en m. q. . . . .	184
D.4	Interpolation d'un signal . . . . .	190
D.5	Estimation d'un paramètre décisionnel vectoriel . . . . .	194
D.6	Estimation en m. q. avec contrainte convexe . . . . .	199
	<b>Index</b>	<b>205</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>211</b>