Chapitre

Limites de suites et de fonctions 1

L'essentiel à connaître

Rappels de cours

Limites de fonctions en a réel

Les fonctions polynômes, rationnelles, sinus, cosinus, racine, valeur absolue, exponentielle, logarithme, puissance sont continues sur tout intervalle I où elles sont définies.
Pour tout réel a d'un tel intervalle, on a $\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$.

Limites de fonctions en + ∞ et – ∞

Toute fonction polynôme admet, **en + ∞ et en – ∞**, même limite que son terme de plus haut degré.

Toute fonction rationnelle admet, **en – ∞ et en + ∞**, même limite que le quotient des termes de plus haut degré.

Formes indéterminées

Ce sont les formes : $\boxed{+\infty - \infty \quad ; 0 \times \infty \quad ; \frac{\infty}{\infty} \quad ; \frac{0}{0}}$

Un résultat à connaître : $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Un résultat fréquemment utilisé

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L > 0$ ou + ∞, et $\lim_{x \to a} g(x) = 0^+$, alors $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

Théorème de composition des limites

Que a, b, L soient réels ou représentent + ∞ ou – ∞,

si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ et si $\lim_{X\to b} g(X) = L$, alors $\lim_{x\to a} g[f(x)] = L$.

En particulier :

si $\lim_{n\to+\infty} u_n = b$ et $\lim_{X\to b} g(X) = L$, alors $\lim_{n\to+\infty} g[u_n] = L$.

Théorèmes de comparaison

Si pour x assez voisin de a, $v(x) \le u(x) \le w(x)$ et si $\lim_{x\to a} v(x) = \lim_{x\to a} w(x) = L$, alors $\lim_{x\to a} u(x) = L$ (Th. des gendarmes)

Si pour x assez voisin de a, $u(x) \ge v(x)$ et si $\lim_{x\to a} v(x) = +\infty$, alors $\lim_{x\to a} u(x) = +\infty$

Limites classiques

$\boxed{\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty}$ $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty}$

$\boxed{\lim_{x\to 0} x\ln x = 0}$ $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0}$ $\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1}$

Pour $\alpha > 0$, $\boxed{\lim_{x\to 0} x^{\alpha} \ln x = 0}$; $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = 0}$

$\boxed{\lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0}$ $\boxed{\lim_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty}$.

$\boxed{\lim_{x\to-\infty} xe^{x} = 0}$ $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x} = +\infty}$ $\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{e^{h}-1}{h} = 1}$

Pour $\alpha > 0$, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha}e^{-x} = 0}$ $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x^{\alpha}} = +\infty}$

Asymptote verticale

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, où a est un réel, la droite d'équation x = a est asymptote à la courbe représentant f.

Asymptote horizontale

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$, où L est réel, la droite d'équation y = L est asymptote à la courbe représentative de f, en + ∞.

Asymptote oblique

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$, la droite d'équation y = ax + b est asymptote à la courbe représentant f, en + ∞.

1. Déterminer la limite de la fonction f

Méthodes 1.1 : fonctions polynômes

En $\pm\infty$: factoriser par le terme de plus haut degré ou utiliser le théorème "Toute fonction polynôme admet, **en + ∞ et en – ∞** même limite que son terme de plus haut degré."

En a, réel : la limite de f en a, est f (a).

Exemples

1. $f(x) = 2x^3 - 6x + 4$ sur **R** ; déterminer la limite en – ∞ et en 3.

2. f est définie sur **R – {1}** par : $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$;

déterminer $\lim\limits_{1} f$ après avoir factorisé le numérateur.

Montrer que la fonction g définie par :

g (x) = f (x) pour $x \neq 1$ et g (1) = 4 est une fonction polynôme.

Solution

1. $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(2 - \dfrac{6}{x^2} + \dfrac{4}{x^3}\right) = -\infty}$, car la parenthèse tend vers 2.

On peut aussi utiliser le théorème : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$

$$\boxed{\lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = 40}.$$

2. Numérateur et dénominateur tendent vers 0. Le numérateur a pour racines 1 et – 3 ; on a donc : $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$,

donc $f(x) = x + 3$ pour $x \neq 3$, donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 4.}$

Soit h la fonction définie sur **R** par h (x) = x + 3 : h = g car pour tout $x \neq 3$, h(x) = f (x) = g (x) et h(1) = g(1) = 4.

$$\boxed{\text{g est bien une fonction polynôme.}}$$

Attention

La fonction $x \mapsto x^2 + 2\sqrt{x} - 1$ n'est pas une fonction polynôme !

Méthodes 1.2 : fonctions rationnelles

Limite en $\pm\infty$: factoriser numérateur et dénominateur par leurs termes de plus haut degré ou utiliser le théorème :
Toute fonction rationnelle admet, **en – ∞ et en + ∞**, même limite que le quotient des termes de plus haut degré.

Limite en a réel : si la fonction f est définie en a, $\lim_a f = f(a)$.

Si le dénominateur de f s'annule en a, il y a deux cas :
- le numérateur s'annule aussi en a : factoriser numérateur et dénominateur par x – a, puis simplifier le quotient par x – a. Déterminer la limite à l'aide de l'expression simplifiée.
- le numérateur ne s'annule pas en a : f (x) tend vers $\pm\infty$.

Exemples

$f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2 - 4x - 3}{x^2 + 2x - 3}$; déterminer les limites en – ∞, – 3 et 1^+.

Solution

$$f(x) = \frac{x^3(1 + 2/x - 4/x^2 - 3/x^3)}{x^2(1 + 2/x - 3/x^2)} = \frac{x(1 + 2/x - 4/x^2 - 3/x^3)}{(1 + 2/x - 3/x^2)}.$$

Les termes entre parenthèses tendent vers 1 ; $\boxed{\lim_{-\infty} f = -\infty.}$

En utilisant le théorème rappelé dans la méthode, on obtient aussi

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$; $\boxed{\lim_{-\infty} f = -\infty.}$

En factorisant par x + 3, numérateur et dénominateur, on obtient

$f(x) = \dfrac{(x+3)(x^2 - x - 1)}{(x+3)(x-1)} = \dfrac{x^2 - x - 1}{x - 1}$; donc : $\boxed{\lim_{x \to -3} f(x) = -\dfrac{11}{4}.}$

$\lim_{x \to 1^+} (x - 1) = 0^+$ et $\lim_{x \to 1^+} (x^2 - x - 1) = -1$, donc : $\boxed{\lim_{1^+} f = -\infty.}$

La droite d'équation x = 1 est asymptote.

Attention

Lire, c'est bien ; comprendre, c'est mieux ; refaire c'est le top !

Méthodes 1.3. : fonctions avec radicaux

Pour la limite en $\pm\infty$, factoriser par le terme "prépondérant".

Dans une expression qui contient $a-\sqrt{b}$, on a parfois intérêt à remplacer $a-\sqrt{b}$ par $\dfrac{(a-\sqrt{b})(a+\sqrt{b})}{a+\sqrt{b}}=\dfrac{a^2-b}{a+\sqrt{b}}$.

Exemples

1. Déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-\sqrt{x})$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-4x}{3x-2\sqrt{x}}$.

2. Montrer que la droite d'équation y = x + 1 est asymptote à la courbe C_f représentant f, telle que $f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}$, en + ∞.

3. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ sur] 1 ; + ∞[; déterminer $\lim\limits_{+\infty} f$ et $\lim\limits_{1} f$.

Solution

1. $\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}=\dfrac{\sqrt{x}}{x(1+1/x)}=\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+1/x)}$; on a donc : $\boxed{\lim\limits_{+\infty} f=0.}$

$x^2-\sqrt{x}=x^2\left(1-\dfrac{\sqrt{x}}{x^2}\right)=x^2\left(1-\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)$; on a donc : $\boxed{\lim\limits_{+\infty} f=+\infty.}$

$\dfrac{2-4x}{3x-2\sqrt{x}}=\dfrac{x(-4+2/x)}{x(3-2/\sqrt{x})}=\dfrac{-4+2/x}{3-2/\sqrt{x}}$; $\boxed{\lim\limits_{+\infty} f=-\dfrac{4}{3}.}$

2. $f(x)-(x+1)=\dfrac{x^2+2x+3-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x+3}+(x+1)}=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+2x+3}+(x+1)}$.

Cette différence tend bien vers 0 quand x tend vers + ∞.

3. $f(x)=\dfrac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\dfrac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\dfrac{1}{(\sqrt{x+3}+2)}$

On a donc $\boxed{\lim\limits_{1} f=1/4}$ et $\boxed{\lim\limits_{+\infty} f=0.}$ L'axe des x est asymptote.

Méthode 1.4. : fonctions faisant intervenir $e^{u(x)}$ et $\ln(u(x))$

Si aucune limite classique ne permet de déterminer la limite :
- Transformer f(x) pour se ramener à une limite classique.
- Majorer ou minorer f(x) par des fonctions de limites connues.

Exemples

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2e^x-1}{e^x+2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2e^x-1}{e^x+2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x)$.

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}[x^2-2x-2\ln(x+1)]$.

3. $f(x)=e^{-x}\cos 4x$; déterminer la limite de f en + ∞.

Solution

1. On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$; on a donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2e^x-1}{e^x+2}=-\dfrac{1}{2}.}$

La seconde limite se présente sous la forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$.

$\dfrac{2e^x-1}{e^x+2}=\dfrac{e^x(2-e^{-x})}{e^x(1+2e^{-x})}=\dfrac{2-e^{-x}}{1+2e^{-x}}$ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2e^x-1}{e^x+2}=2.}$

$x-\ln x=x\left(1-\dfrac{\ln x}{x}\right)$; comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x)=+\infty.}$

2. Posons $f(x)=x^2-2x-2\ln(x+1)=x\left[x-2-2\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\times\dfrac{x+1}{x}\right]$;

$\lim\limits_{X\to+\infty}[(\ln X)/X]=0$, et $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x+1)/x]=1$, donc : $\boxed{\lim\limits_{+\infty} f=+\infty.}$

3. Pour tout x, $-1\le\cos 4x\le 1$, donc en multipliant par $e^{-x}>0$, $-e^{-x}\le e^{-x}\cos 4x\le e^{-x}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$. Le théorème des gendarmes permet alors de dire que : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0.}$

Attention
Méfiez-vous des contrefaçons : n'utilisez que les limites classiques.

Méthode 1.5. : fonctions faisant intervenir cos x ou sin x

● Utiliser les limites évidentes des fonctions trigonométriques, ainsi que : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

● Utiliser les encadrements : $-1 \le \sin x \le 1$, $-1 \le \cos x \le 1$, pour encadrer la fonction et utiliser les théorèmes de comparaison.

Exemples

Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x}$,
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin x}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-\cos n)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left((1/2)^n \sin n\right)$.

Solution

● $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} \sin X = 0$, donc d'après le théorème de composition des limites, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\frac{1}{x} = 0.}$

● $x\sin\frac{1}{x} = \frac{\sin(1/x)}{1/x}$; or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} \frac{\sin X}{X} = 1$, donc d'après le théorème de composition des limites, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin(1/x)}{1/x} = 1.}$

● $\frac{\sin 3x}{\sin x} = 3\frac{\sin 3x}{3x} \times \frac{x}{\sin x}$; or $\lim\limits_{X\to 0} \frac{\sin X}{X} = 1$, donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin x} = 3.}$

● Comme $-1 \le -\cos n \le 1$, $n-1 \le n-\cos n \le n+1$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-1) = +\infty$, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} (n-\cos n) = +\infty.}$

● Comme $-1 \le \sin n \le 1$, $-(1/2)^n \le (1/2)^n \sin n \le (1/2)^n$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} (1/2)^n = 0$, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} [(1/2)^n \sin n] = 0.}$