

# Sommaire

## Premier semestre

### Logique – Raisonnement

1	Prouver une inégalité	13
2	Prouver une équivalence	18
3	Raisonnement par l'absurde	23
4	Raisonnement par analyse-synthèse	27
5	Raisonnement par récurrence simple	30
6	Raisonnement par récurrence multiple	34
7	Raisonnement par récurrence forte	38

### Calculs

8	Manipuler les valeurs absolues	42
9	Manipuler la partie entière	46
10	Manipuler les factorielles et les coefficients binomiaux	50
11	Calculer une somme à l'aide de sommes connues	54
12	Effectuer un changement d'indice dans une somme	59
13	Calculer une somme télescopique	64
14	Utiliser la formule du binôme de Newton	68
15	Calculer une somme double	72
16	Calculer un produit	77

### Systemes linéaires

17	Résoudre un système linéaire	81
18	Résoudre un système linéaire à paramètre(s)	87

### Nombres complexes

19	Déterminer module et argument d'un complexe	93
20	Simplifier un quotient de complexes	97
21	Montrer qu'un complexe est réel ou imaginaire pur	100
22	Utiliser des complexes pour calculer des sommes de réels	103

<b>23</b>	Résoudre des équations en utilisant la forme exponentielle	106
<b>24</b>	Trouver les racines carrées d'un nombre complexe	110
<b>25</b>	Résoudre une équation du second degré à coefficients complexes	114

## **Polynômes**

<b>26</b>	Pratiquer la division euclidienne	117
<b>27</b>	Trouver le reste d'une division euclidienne	121
<b>28</b>	Factoriser un polynôme complexe	124
<b>29</b>	Factoriser un polynôme réel	129
<b>30</b>	Montrer qu'un polynôme est nul	133

## **Calcul matriciel**

<b>31</b>	Calculer une puissance de matrice avec la formule du binôme	136
<b>32</b>	Calculer une puissance de matrice avec un polynôme annulateur	141
<b>33</b>	Calculer une puissance de matrice en l'écrivant $PDP^{-1}$	146
<b>34</b>	Étudier l'inversibilité d'une matrice (presque) sans calcul	150
<b>35</b>	Étudier l'inversibilité d'une matrice avec la méthode du pivot	154

## **Suites réelles**

<b>36</b>	Étudier une suite arithmético-géométrique	158
<b>37</b>	Étudier une suite récurrente linéaire d'ordre 2	161
<b>38</b>	Calculer la limite d'une suite	165
<b>39</b>	Calculer la limite d'une suite par encadrement ou par comparaison	171
<b>40</b>	Utiliser le théorème de la limite monotone pour une suite	175
<b>41</b>	Utiliser le théorème des suites adjacentes	179

## **Limites et étude locale d'une fonction d'une variable réelle**

<b>42</b>	Calculer la limite d'une fonction (avec indétermination)	183
<b>43</b>	Montrer qu'une fonction est continue en un point	189
<b>44</b>	Montrer qu'une fonction est dérivable en un point	193

## **Étude globale d'une fonction d'une variable réelle**

<b>45</b>	Déterminer les variations d'une fonction	198
<b>46</b>	Étudier la parité d'une fonction	203
<b>47</b>	Étudier la périodicité d'une fonction	206

## Les grands théorèmes sur les fonctions et leurs conséquences

48	Mettre en oeuvre le théorème de la bijection	209
49	Construire le tableau de variation de la fonction réciproque d'une fonction bijective	212
50	Calculer la fonction réciproque d'une fonction bijective	216
51	Étudier une suite implicite avec l'aide de la fonction réciproque d'une bijection	220
52	Étudier une suite implicite sans l'aide de la fonction réciproque d'une bijection	225
53	Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires	230
54	Utiliser le théorème de Rolle	233
55	Utiliser l'inégalité des accroissements finis	236

## Intégration sur un segment

56	Calculer une intégrale en trouvant une primitive	240
57	Calculer une intégrale à l'aide d'une intégration par parties	245
58	Calculer une intégrale à l'aide d'un changement de variable	248
59	Étudier une suite définie par une intégrale	251
60	Étudier une intégrale fonction de sa borne supérieure	255
61	Étudier une intégrale dont les bornes sont des fonctions	260
62	Reconnaître une somme de Riemann et calculer sa limite	264

## Dénombrement et combinatoire

63	Dénombrer lorsque l'ordre n'importe pas (cas des parties d'un ensemble)	267
64	Dénombrer lorsque l'ordre importe (cas des listes)	271

## Généralités sur les probabilités

65	Écrire un événement avec réunions, intersections, ou complémentaires	276
66	Calculer la probabilité d'une intersection finie	279
67	Calculer la probabilité d'une réunion finie	283
68	Appliquer la formule des probabilités totales	287

## Variables aléatoires discrètes finies

69	Déterminer la loi d'une variable aléatoire discrète finie	292
70	Calculer l'espérance d'une variable aléatoire discrète finie	297
71	Calculer la variance d'une variable aléatoire discrète finie	300
72	Reconnaître une loi binomiale	304

## Espaces vectoriels

73	Montrer qu'un vecteur s'écrit comme combinaison linéaire d'autres vecteurs	308
74	Montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel	313
75	Étudier la liberté d'une famille de vecteurs	318
76	Trouver une base d'un sous-espace vectoriel	323
77	Calculer les coordonnées d'un vecteur dans une base	329
78	Modifier et simplifier une famille génératrice	333

## Deuxième semestre

### Dérivées successives

79	Étudier et utiliser la convexité d'une fonction	341
80	Étudier une fonction définie avec des puissances réelles	346
81	Utiliser la formule de Leibniz	351
82	Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral	355
83	Utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange	359

### Analyse asymptotique

84	Déterminer un équivalent simple d'une suite	363
85	Utiliser la formule de Taylor-Young	367
86	Calculer un développement limité à l'aide des opérations usuelles	370
87	Utiliser un équivalent ou un développement limité pour calculer une limite	375

### Séries numériques

88	Étudier la nature d'une série à l'aide de ses sommes partielles	379
89	Étudier la nature d'une série à l'aide de séries connues	383
90	Étudier la nature d'une série à l'aide d'un critère de comparaison	387
91	Étudier une suite ou une série à l'aide d'une somme télescopique	392

### Intégration sur un intervalle quelconque

92	Étudier la nature d'une intégrale généralisée à l'aide d'un calcul	396
93	Étudier la nature d'une intégrale généralisée à l'aide d'un critère de comparaison	400
94	Étudier la nature d'une intégrale deux fois généralisée	404

## Probabilités sur un univers dénombrable

95	Calculer la probabilité d'une réunion infinie	408
96	Calculer la probabilité d'une intersection infinie	413

## Variables aléatoires discrètes infinies

97	Calculer, si elle existe, l'espérance d'une variable aléatoire discrète infinie	417
98	Calculer, si elle existe, la variance d'une variable aléatoire discrète infinie	422
99	Reconnaître une loi géométrique	426
100	Utiliser le système complet d'événements associé à une variable aléatoire discrète	431
101	Exploiter le lien entre $P(X=k)$ , $P(X>k)$ et $P(X<k)$	436
102	Calculer la probabilité qu'une variable $X$ prenne une valeur paire, une valeur impaire	441

## Variables aléatoires à densité

103	Montrer qu'une variable aléatoire est à densité et en déterminer une densité	445
104	Montrer qu'une fonction est une densité et calculer la fonction de répartition associée	448
105	Calculer, si elle existe, l'espérance d'une variable aléatoire à densité	453
106	Utiliser la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite	456
107	Déterminer la loi d'une transformée affine d'une variable aléatoire à densité	460

## Espaces vectoriels

108	Montrer qu'une famille est une base à l'aide d'un argument de dimension	463
109	Compléter une famille libre en une base	466
110	Déterminer le rang d'une famille de vecteurs	470
111	Montrer que la somme de deux sous-espaces vectoriels est directe	473
112	Montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires	476
113	Montrer qu'une somme de plusieurs sous-espaces vectoriels est directe	480
114	Montrer qu'un espace vectoriel est somme directe de sous-espaces vectoriels	485

## Applications linéaires

115	Montrer qu'une application est linéaire	488
116	Déterminer le noyau d'une application linéaire	493
117	Déterminer l'image et le rang d'une application linéaire	497
118	Utiliser le théorème du rang	501
119	Montrer qu'une application linéaire est un isomorphisme	504

<b>120</b>	Montrer qu'une application linéaire est un projecteur	508
<b>121</b>	Montrer qu'une application est une forme linéaire non nulle	512
<b>122</b>	Calculer la matrice d'une application linéaire	516
<b>123</b>	Déterminer le rang d'une matrice	521