Chapitre

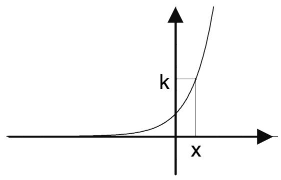
# Fonction exponentielle 1

L'essentiel à connaître

## *Rappels de cours*

La fonction exp est la seule fonction telle que pour tout x réel :
$f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$, soit $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$.

La fonction exp est strictement positive :
pour tout x réel : $\exp(x) > 0$.




Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $k > 0$, il existe x tel que $\exp(x) = k$.

On note : $\exp(x) = e^x$ où $e = \exp(1)$ ; on a : $e^1 = e$ et $e^0 = 1$.
Pour tous x et y réels et tout entier relatif n :

| | |
|---|---|
| $e^x e^y = e^{x+y}$ | $\left(e^x\right)^n = e^{nx}$ |
| $\dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$ | $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ |

On a aussi, pour tout x réel : $e^x > 0$.

Pour tous x et y réels : $\boxed{e^x = e^y \Leftrightarrow x = y}$ et $\boxed{e^x < e^y \Leftrightarrow x < y}$.

**Th :** Si u est une fonction dérivable sur un intervalle J, la fonction f telle que $\boxed{f(x) = e^{u(x)}}$ est dérivable sur J et : $\boxed{f'(x) = u'(x)e^{u(x)}}$.

**Vrai-Faux**

| | V | F |
|---|---|---|
| **1.** La fonction exp est strictement positive sur $\mathbb{R}$. | | |
| **2.** Tangente au point d'abscisse 0 : y = x. | | |
| **3.** Pour tout x réel, $e^x \geq x+1$. | | |
| **4.** $\lim\limits_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ exprime la dérivabilité de exp en 0. | | |
| **5.** Pour tout x réel $e^{2x} = (e^x)^2$. | | |
| **6.** Pour tous réels x et y, $e^{x/y} = e^x - e^y$. | | |
| **7.** Quand on ne sait pas résoudre l'équation f (x) = 0, on étudie souvent le sens de variations de f. | | |
| **8.** Si f a un maximum négatif sur **I**, f est négative sur **I** | | |
| **9.** Si f a un maximum positif sur **I**, f est positive sur **I**. | | |
| **10.** Si f croît sur **I** = [a ; b ] et si pour $c \in$ **I**, f (c) = 0, alors $f(x) \leq 0$ sur [a ; c] et $f(x) \geq 0$ sur [c ; b]. | | |
| **11.** La dérivée de $e^{-x}$ est $e^{-x}$. | | |
| **12.** L'équation $e^{x^2-1} = -1$ a deux solutions. | | |

**Solution**

**1.** Vrai : elle est définie sur $\mathbb{R}$ mais l'ensemble-image est $\mathbb{R}_+^*$.
**2.** Faux : cette tangente importante a pour équation y = x + 1.
**3.** Vrai : la courbe est toute entière au dessus de sa tangente en 0.
**4.** Vrai : f est dérivable en $x_0$ si $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ est un réel.
**5.** Vrai : $(e^x)^n = e^{nx}$.
**6.** Faux : $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$.
**7.** Vrai : il y a cependant des cas où cette étude ne donne rien.
**8.** Vrai : si $f \leq M \leq 0$, alors $f \leq 0$.
**9.** Faux : on ne peut rien dire sans résultats supplémentaires.
**10.** Vrai : $a \leq x \leq c \Rightarrow f(x) \leq f(c)$, soit $f(x) \leq 0$.
**11.** Faux : la dérivée est $-e^{-x}$, car $(e^w)' = w'e^w$.
**12.** Faux : une exponentielle est toujours un réel strictement positif.

## Q.C.M.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 0{,}5 - x^2e^{1-x^2}$ .

**A.** Représenter f sur une calculatrice. D'après le graphique C :

**1.** L'équation $f(x) = 0$ a : □ 3 solutions □ 4 solutions □ 0 solution.

**2.** L'équation $f(x) = 1$ a : □ 3 solutions □ 4 solutions □ 0 solution.

**3.** L'équation f(x)= – 0,5 a : □ 3 solutions □ 2 solutions □ 1 solution.

**4.** Une solution de l'équation f(x)= – 0,5 est : □ 1 □ 1,1 □ 0,9

**5.** f est minorée par : □ – 0,5 □ – 1 □ 0 □ 0,5

**6.** Sur $[1;+\infty[$ : □ f est majorée par 0,5 □ f a pour maximum 0,5.

**7.** f ' décroît puis croît sur : □ [0 ; 1] □ [1; 2] □ $[2;+\infty[$

**8.** f ' a donc un minimum sur : □ [0 ; 1] □ [1 ; 2] □ $[2;+\infty[$ .

**9.** En 2, coefficient directeur de la tangente $\cong$ : □ 3 □ – 1 □ 0,5

**B. 10.** f est : □ paire □ impaire □ ni paire, ni impaire.

**11.** □ $f'(x) = 2x(x-1)(x+1)e^{1-x^2}$ □ $f'(x) = -2xe^{1-x^2}$

□ $f'(x) = 4x^2e^{1-x^2}$ □ $f'(x) = -x(x+2)e^{1-x^2}$

**12.** □ f décroît sur [0 ; 1] □ f croît sur $[1:+\infty[$ □ f est monotone

### Solution

**1.** 4 solutions : C coupe 4 fois l'axe des x.

**2.** 0 solution : la droite d'équation y = 1 ne coupe pas la courbe.

**3.** 2 solutions : la droite d'équation y = – 0,5 coupe C en 2 points.

**4.** 1 est solution ; vérification : $0{,}5 - 1^2e^{1-1} = 0{,}5 - 1 = -0{,}5$ .

**5.** f est minorée par – 0,5 et aussi par – 1 .

**6.** f est majorée par 0,5 qui n'est pas un maximum car il n'y a aucun x sur cet intervalle dont l'image est 0,5.

**7.** Le coefficient directeur de la tangente décroît puis croît sur [0 ;1]

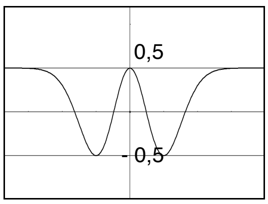
**8.** f ', coefficient directeur de la tangente, a un minimum sur [0 ; 1].

**9.** Le coefficient directeur est $\cong 0{,}5$.

**10.** f est paire car f (– x) = f (x) pour tout x.

**11.** $f'(x) = 2x(x-1)(x+1)e^{1-x^2}$ .

**12.** f décroît sur [0 ; 1[ et f croît sur $[1:+\infty[$ .



**ROC**

On se propose de prouver l'unicité de la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que : $f(0)=1$ et pour tout réel x, $f'(x)=f(x)$.
L'existence d'une telle fonction a été admise.
**1.** Soit f une fonction vérifiant les 2 conditions et soit $\varphi$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x)=f(x)\times f(-x)$
**a.** Calculer $\varphi'(x)$ ; que peut-on en déduire pour la fonction $\varphi$ ?
**b.** Montrer que f ne peut pas s'annuler sur $\mathbb{R}$.
**2.** Supposons qu'il existe 2 fonctions f et g vérifiant les 2 conditions
**a.** Montrer que $h=\frac{f}{g}$ est définie sur $\mathbb{R}$.
**b.** Calculer $h'(x)$, puis en déduire que f = g.

**Solution**

**1.a.** On rappelle que la dérivée de la fonction $x \mapsto f[u(x)]$ est la fonction $x \mapsto u'(x)\times f'[u(x)]$ et en appliquant ce résultat à la fonction $v : x \mapsto f(-x)$, où $u(x)=-x$, on obtient $v'(x)=-f'(-x)$.
On a donc d'après la règle de dérivation d'un produit :
$\varphi'(x)=f'(x)f(-x)+f(x)\times[-f'(-x)]$ ; mais pour tout x, f '(x) = f (x),
donc pour tout x réel, $\varphi'(x)=f(x)f(-x)+f(x)\times[-f(-x)]=0$.
$\varphi$ est donc constante sur $\mathbb{R}$.

**b.** Or $\varphi(0)=f(0)f(-0)=1$ ; donc pour tout x réel, $\varphi(x)=1$.
Si f s'annulait pour un certaine valeur $x_0$, on aurait
$\varphi(x_0)=f(x_0)f(-x_0)=0$, ce qui contredirait le fait que pour tout x réel $\varphi(x)=1$. f ne s'annule donc jamais sur $\mathbb{R}$.

**2. a.** f et g sont définis sur $\mathbb{R}$ et d'après 1., g ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ ; h est donc définie sur $\mathbb{R}$.
**b.** $h'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)^2]}$ ; or f ' = f et g ' = g, donc pour tout x réel, $h'(x)=0$ ; h est donc constante sur $\mathbb{R}$ et $h(0)=\frac{f(0)}{g(0)}=1$.

Donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=1$, donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=g(x)$.

**ROC**

On se propose de prouver que pour tous x et y, $e^{x+y} = e^x e^y$, en n'utilisant que le fait que la fonction exponentielle f telle que $f(x) = e^x$, possède les propriétés :

$f(0) = 1$, pour tout x réel, $f'(x) = f(x)$ et f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

**1.** Soit un réel quelconque fixé y et soit h la fonction définie par : pour tout x réel, $h(x) = \dfrac{f(x+y)}{f(x)}$ ; calculer h'(x).

**2.** En déduire que h est constante et égale à f (y).
Prouver alors la propriété $e^{x+y} = e^x e^y$.

**3.** En déduire : **a.** Pour tout réel x, $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

**b.** Pour tous x et y réels, $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$.

**Solution**

**1.** h est bien définie sur $\mathbb{R}$ puisque f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
La fonction $\varphi : x \mapsto f(x+y)$ de la variable x, y étant fixé, est la composée de la fonction $x \mapsto x+y$ et de la fonction f. D'après le théorème de la dérivation d'une fonction composée, on a donc :

$\varphi'(x) = 1.f'(x+y)$ et on a : $h'(x) = \dfrac{f'(x+y)f(x) - f'(x)f(x+y)}{[f(x)]^2}$.

Comme $f' = f$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $h'(x) = \dfrac{f(x+y)f(x) - f(x)f(x+y)}{[f(x)]^2} = 0$.

**2.** h est donc une fonction constante de la variable x pour tout y fixé. On a donc pour tout x réel et tout y fixé :

$h(x) = h(0) = \dfrac{f(0+y)}{f(0)} = f(y)$. En conclusion, pour tous y et x on a :

$\dfrac{f(x+y)}{f(x)} = f(y)$, soit $f(x+y) = f(x)f(y)$, soit : $\boxed{e^{x+y} = e^x e^y.}$

**3. a.** $e^0 = e^{x+(-x)} = e^x e^{-x}$, soit $1 = e^x e^{-x}$, donc : $\boxed{e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}.}$

**b.** $e^{x-y} = e^{x+(-y)} = e^x e^{-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$, d'après a. donc : $\boxed{e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}.}$

## 1. Réduire l'expression d'une fonction

**Méthode**

Apprendre et utiliser les relations suivantes dans les deux sens

$e^x e^y = e^{x+y}$ ; $(e^x)^n = e^{nx}$ ; $\dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$ ; $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$.

### Exemples

**1.** Réduire l'expression des fonctions f telles que :

**a.** $f(x) = e^{3x} \times (e^{-2x+1})^2$ **b.** $f(x) = \dfrac{e^{3x} \times e}{(e^x)^2}$ **c.** $f(x) = \dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{2e^x}$.

**2.** Montrer : **a.** $\dfrac{e^{-x} - e^x}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}}$ **b.** $e^x + e^{-x} + 2 = e^{-x}(e^x + 1)^2$.

### Solutions

**1.a.** $e^{3x} \times (e^{-2x+1})^2 = e^{3x} \times e^{-4x+2} = e^{3x-4x+2}$ ; $\boxed{f(x) = e^{-x+2}}$.

**b.** $\dfrac{e^{3x} \times e}{(e^x)^2} = \dfrac{e^{3x} \times e^1}{e^{2x}} = \dfrac{e^{3x+1}}{e^{2x}} = e^{3x+1-2x}$ ; $\boxed{f(x) = e^{x+1}}$.

**c.** $\dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{2e^x} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^{2x}}{e^x} + \dfrac{e^{-2x}}{e^x}\right)$ ; $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-3x})}$.

**2. a.** Partons du second membre et factorisons par $e^x$.

$\dfrac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}} = \dfrac{e^x(e^{-x} - e^x)}{e^x(e^{-x} + e^x)} = \dfrac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x}$ ; en effet,

$e^x e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1$ et $e^x e^x = e^{x+x} = e^{2x}$.

**b.** $e^{-x}(e^x + 1)^2 = e^{-x}[(e^x)^2 + 2e^x + 1] = e^{-x}[e^{2x} + 2e^x + 1]$, donc

$e^{-x}(e^x + 1)^2 = e^{2x-x} + 2e^{-x+x} + e^{-x} = e^x + 2 + e^{-x}$.

**Attention :**
Il faut savoir utiliser les relations dans les deux sens.

## 2. Résoudre l'équation f (x) = 0



**Méthode**

> Déterminer l'ensemble de définition D de cette équation. Transformer l'équation pour la ramener à la forme : $e^a = e^b$. Ne conserver que les nombres qui appartiennent à D. Vérifier avec la calculatrice.

### Exemples

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

**1.** $e^{x^2-4} = 1$ **2.** $e^{\sqrt{x}} = e \times e^{-2x}$ **3.** $e^{2x} + (1-e)e^x - e = 0$.

Pour l'équation **3.**, poser $X = e^x$ ; on est ramené à $X^2 + bX + c = 0$.

### Solutions

**1.** L'équation est définie sur $\mathbb{R}$ car la fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$.
Elle s'écrit : $e^{x^2-4} = e^0$ qui équivaut à : $x^2 - 4 = 0$, soit $x^2 = 4$.
L'ensemble des solutions de cette équation est donc : $\boxed{S = \{-2;2\}}$.

**2.** L'équation est définie sur $\mathbb{R}^+$ car $\sqrt{x}$ n'est définie que sur $\mathbb{R}^+$.
Elle s'écrit : $e^{\sqrt{x}} = e^{1-2x}$ et équivaut à : $\sqrt{x} = 1 - 2x$.
L'égalité n'est possible que si $1 - 2x \geq 0$, c'est-à-dire si $x \leq 1/2$.
Cette condition étant réalisée, elle équivaut à : $(\sqrt{x})^2 = (1-2x)^2$,
soit finalement : $4x^2 - 5x + 1 = 0$, équation qui a pour solutions 1 et $\frac{1}{4}$. Compte tenu des conditions $x \in \mathbb{R}^+$ et $x \leq \frac{1}{2}$, on a : $\boxed{S = \left\{\frac{1}{4}\right\}}$.

**3.** L'équation est définie sur $\mathbb{R}$ car la fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$.
Posons $X = e^x$ ; l'équation s'écrit : $X^2 + (1-e)X - e = 0$.

$\Delta = (1-e)^2 + 4e = 1 - 2e + e^2 + 4e = 1 + 2e + e^2 = (e+1)^2$

On obtient X' = – 1 et X" = e, c'est-à-dire $e^x = -1$ ou $e^x = e = e^1$.
Comme $e^x > 0$, l'équation a une seule solution : $\boxed{S = \{1\}}$.

**Attention :**
C'est fou ! Il ne suffit pas de savoir calculer, faut toujours penser aux conditions et autres traquenards !

## 3. Résoudre l'inéquation f (x) > 0

**Méthode**

Déterminer l'ensemble de définition D de cette inéquation.
Transformer l'équation pour la ramener à la forme : $e^a < e^b$.
Ne conserver que les nombres qui appartiennent à D.
Vérifier avec la calculatrice en représentant la fonction.

### Exemples

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

**1.** $e^{\sqrt{x-1}} \le e^2$ **2.** $e^{\frac{1}{x}} > e$ **3.** $e^{2x} + (1-e)e^x - e \ge 0$.

### Solutions

**1.** L'inéquation est définie sur $D = [1;+\infty[$, comme $\sqrt{x-1}$.
Elle s'écrit : $\sqrt{x-1} \le 2$ ; comme les deux membres sont positifs, $a \le b \Leftrightarrow a^2 \le b^2$ et l'inéquation équivaut à : $x-1 \le 4$, soit $x \le 5$.
Compte tenu de D, on a $x \ge 1$ et $x \le 5$ donc : $\boxed{S = [1;5]}$.

**2.** L'inéquation est définie sur $\mathbb{R}^*$.
Elle équivaut à : $e^{\frac{1}{x}} > e^1$, soit $\frac{1}{x} > 1$, soit $\frac{1}{x} - 1 > 0$, soit $\frac{1-x}{x} > 0$.
En faisant un tableau du signe de $1-x$ et de x, on a : $\boxed{S = ]0;1[}$.

**3.** L'inéquation est définie sur $\mathbb{R}$.
En posant $X = e^x$, elle s'écrit : $X^2 + (1-e)X - e \ge 0$.
En 2.3., on a calculé les racines du trinôme qui sont $-1$ et e.
Ce trinôme est positif " à l'extérieur " , c'est-à-dire pour $X \ge e$ ou $X \le -1$, ce qui revient à $e^x \ge e$ ou $e^x \le -1$.
Comme : $(\forall x \in \mathbb{R})$ $e^x > 0$, seule la première inéquation donne des solutions : elle équivaut à $e^x \ge e^1$, soit $x \ge 1$. $\boxed{S = [1;+\infty[}$.

**Attention :**
Les inéquations ne figurent pas en général au hit parade des questions préférées ! Ayez de la rigueur !