CHAPITRE 1 :

MÉTHODES POUR BIEN COMMENCER...

Voilà un tout petit chapitre pour bien commencer comme l'annonce son titre... Disons que c'est une simple mise au point sur les raisonnements les plus classiques et sur les calculs de base que vous devez maîtriser. Autant dire que les méthodes que l'on va développer dans ce chapitre seront régulièrement réinvesties tout au long de ce livre...

1. Quels sont les raisonnements classiques

A) Les récurrences

MÉTHODE 1 : La récurrence

■ **Cas d'utilisation :**
Dès qu'on voit une propriété dépendant d'un entier, on peut se poser la question de la récurrence. Ainsi, une question commençant par "Montrer que pour tout entier naturel n, on a ... " sent fortement la récurrence ! Attention, avant de vous lancer dans une récurrence, essayez le calcul direct qui est toujours plus rapide, tentez donc de démontrer directement $\mathcal{P}(n)$. Si le calcul direct n'aboutit pas et qu'on peut enchaîner logiquement $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ (c'est-à-dire que $\mathcal{P}(n)$ apporte une information sur $\mathcal{P}(n+1)$) alors on peut envisager assez naturellement une récurrence.
On reviendra sur ce raisonnement tout au long de ce livre. Notez par avance un certain nombre de cas classiques où les récurrences interviendront :

- **Suites :** Très très souvent ! Notamment lors de la recherche du terme général ou pour des histoires de croissance...
- **Dérivabilité :** Typiquement quand on veut calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une fonction.
- **Intégration :** Quand on a une suite d'intégrales $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que l'on veut expliciter. Il est alors classique de mêler intégration par parties et récurrence...
- **Matrices :** La récurrence intervient surtout pour le calcul de la puissance $n^{\text{ième}}$ des matrices.
- **Polynômes :** Quand on a une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont on veut évaluer le degré ou la parité... De nouveau, on s'en sort par récurrence !
- **Probabilité :** La récurrence peut intervenir en proba quand on étudie une expérience qui se passe en plusieurs étapes et qu'on a besoin de savoir ce qui s'est passé avant pour pouvoir parler de la $n^{\text{ième}}$ étape. (n tirages sans remise par exemple).

Vous voyez que ça sert de savoir récurrer...

■ **Principe :**

On souhaite démontrer qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ dépendant d'un entier naturel n est vraie au-delà d'un certain entier n_0. Pour démontrer $\mathcal{P}(n)$ par récurrence, il faut respecter scrupuleusement ces différentes étapes :

- **Etape 1 : L'introduction.** On énonce clairement la propriété $\mathcal{P}(n)$ que l'on va démontrer.
- **Etape 2 : L'initialisation.** On démontre que notre propriété est vraie au rang n_0 (n_0 est souvent 0...).
- **Etape 3 : L'hérédité.** On prouve que notre propriété est héréditaire. Cela veut dire qu'on la suppose vraie pour un certain rang n avec n un entier supérieur ou égal à n_0 et on montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est alors vraie.
- **Etape 4 : La conclusion.** On dit alors que $\mathcal{P}(n)$ est vraie au rang n_0 et est héréditaire, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à n_0 d'après le principe de récurrence.

■ **Mise en garde :**

Quelques erreurs classiques :

- Démontrer par récurrence une propriété dépendant d'un réel (ou d'un complexe)... Cela ne veut rien dire ! ! !
- Oublier l'initialisation ou supposer la propriété vraie au rang n_0. A ce moment là, même si l'initialisation est simple, votre raisonnement ne vaut tout simplement rien. Ne méprisez pas l'initialisation, elle peut vous donner une idée sur la façon dont vous allez lier $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$.
- Démontrer $\mathcal{P}(n+1)$... en supposant $\mathcal{P}(n+1)$ vraie ! Autant dire que vous n'avez pas alors fait grand chose... Cela vous arrive ouvertement quand vous utilisez $\mathcal{P}(n+1)$ lors du passage $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$. Mais cela vous arrive aussi de manière plus subtile quand, lors de l'hérédité, vous ne supposez pas $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain rang n mais pour tout entier n supérieur à n_0 ou à partir d'un certain entier n supérieur à n_0. Dans ces deux cas, vous supposez en particulier $\mathcal{P}(n+1)$ vraie ! La différence est donc de taille !
- Démontrer $\mathcal{P}(n+1)$... sans utiliser le fait que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Cela signifie qu'un calcul direct aurait suffi. Vous n'avez pas fait d'erreur... mais vous avez perdu du temps et c'est plutôt maladroit !

■ ***Exemple* :** *Soient n et k deux entiers naturels tels que $0 \leqslant k < n$. Montrer que :*

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

Soient n et k deux entiers naturels tels que $0 \leqslant k < n$. On a :

$$\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!(n-k) + n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!}$$

On reconnaît donc $\dfrac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-k-1)!}$, c'est-à-dire $\dbinom{n+1}{k+1}$. Voici un exemple de proposition dépendant d'entiers et pouvant se démontrer sans récurrence ! A garder dans un coin de votre tête !

■ ***Exemple*** **:** *Soit n un entier naturel. Montrer que* $\sum_{k=0}^{n}(2k) = n(n+1)$.

Respectons les différentes étapes et on s'en sortira très bien...

- **Introduction :** Pour tout n entier naturel, on appelle $\mathcal{P}(n)$ la proposition suivante :

$$\mathcal{P}(n) : " \sum_{k=0}^{n}(2k) = n(n+1) "$$

- **Initialisation :** $\sum_{k=0}^{0}(2k) = 0$ et $0(0+1) = 0$ donc $\sum_{k=0}^{0}(2k) = 0(0+1)$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie pour un certain entier naturel n, montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est alors vraie :

$$\sum_{k=0}^{n+1}(2k) = 2(n+1) + \sum_{k=0}^{n}(2k) = 2(n+1) + n(n+1) \text{ d'après } \mathcal{P}(n)$$

et ceci est $(n+1)(n+1+1)$. $\mathcal{P}_{n+1}$ est donc vraie si $\mathcal{P}_n$ l'est.
- **Conclusion :** $\mathcal{P}(n)$ est vraie au rang 0 et est héréditaire, $\mathcal{P}(n)$ est donc vraie pour tout entier naturel n d'après le principe de récurrence.

MÉTHODE 2 : La récurrence "forte"

■ **Principe :**

On souhaite encore démontrer qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ dépendant d'un entier naturel n est vraie au-delà d'un certain entier n_0. La récurrence "forte" marche ainsi :

- **Etape 1 : L'introduction.** Même étape que pour la récurrence faible.
- **Etape 2 : L'initialisation.** Même étape que pour la récurrence faible.
- **Etape 3 : L'hérédité.** On suppose notre propriété vraie **jusqu'à** un certain rang n avec n un entier supérieur ou égal à n_0 et on montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est alors vraie.
- **Etape 4 : La conclusion.** On dit alors que $\mathcal{P}(n)$ est vraie au rang n_0 et est héréditaire (au sens fort), $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à n_0 d'après le principe de récurrence "forte".

Ceux qui n'ont pas vu la différence feraient bien de se concentrer... Et si vous éteigniez votre télé ?

■ **Cas d'utilisation :**

Par rapport à la récurrence classique, on fait une récurrence "forte" quand on a besoin de $\mathcal{P}(n_0), \cdots, \mathcal{P}(n)$ pour envisager $\mathcal{P}(n+1)$ et qu'on ne parvient pas juste avec $\mathcal{P}(n)$ à démontrer $\mathcal{P}(n+1)$...

■ ***Exemple*** : *On définit la suite* $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *par :* $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall m \in \mathbb{N}, u_{m+1} = \sum\limits_{k=0}^{m} u_k \end{cases}$ *. Soit* n *un entier naturel non nul, vérifiez que* $u_n = 2^{n-1}$.

Pour tout n entier naturel non nul, on appelle $\mathcal{P}(n)$ la proposition suivante :

$$\mathcal{P}(n) : \text{" } u_n = 2^{n-1} \text{ "}$$

$u_1 = u_0 = 1$ et $2^{1-1} = 1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
On suppose $\mathcal{P}(m)$ vraie jusqu'à un certain entier naturel m non nul, montrons que $\mathcal{P}(m+1)$ est alors vraie :

$$\begin{aligned} u_{m+1} = \sum_{k=0}^{m} u_k &= u_0 + \sum_{k=1}^{m} u_k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{m} 2^{k-1} \text{ d'après } \mathcal{P}(1), \cdots, \mathcal{P}(m) \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{m-1} 2^k \text{ avec un p'tit changement de variable !} \\ &= 1 + \frac{1-2^m}{1-2} \text{ (cf cours sur les suites géométriques.)} \\ &= 2^m \end{aligned}$$

$\mathcal{P}(m+1)$ est donc vraie si $\mathcal{P}(1), \cdots, \mathcal{P}(m)$ le sont. $\mathcal{P}(n)$ est vraie au rang 1 et est héréditaire au sens fort, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n non nul d'après le principe de récurrence forte.

MÉTHODE 3 : Autres récurrences

■ **Principe :**
Dans une récurrence, le principe est toujours le même. Il faut que votre processus vous permette de décrire tous les entiers pour lesquels vous souhaitez démontrer que votre propriété est vraie. On s'explique. Quand vous prouvez :

$$\mathcal{P}(0) \text{ est vraie et } \forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$$

alors vous avez bien prouvé que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n. En effet, $\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\mathcal{P}(0) \Rightarrow \mathcal{P}(1)$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie. $\mathcal{P}(1)$ est vraie et $\mathcal{P}(1) \Rightarrow \mathcal{P}(2)$ donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie...
Passons à la forte, quand vous prouvez :

$$\mathcal{P}(0) \text{ est vraie et } \forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(0), \cdots, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$$

alors de nouveau, vous avez prouvé que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n. En effet, $\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\mathcal{P}(0) \Rightarrow \mathcal{P}(1)$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie. $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies et $\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1) \Rightarrow \mathcal{P}(2)$ donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie...
Vous pouvez aussi faire une récurrence à votre sauce. Citons la récurrence double qui est aussi très classique. On veut encore prouver que $\mathcal{P}(n)$ pour

tout entier naturel n est vraie au-delà d'un certain entier n_0 (ça doit être une obsession décidément !). This is la démarche pour les récurrences doubles :

- **Etape 1 : L'introduction.** Même étape que pour la récurrence faible.
- **Etape 2 : L'initialisation.** On démontre que notre propriété est vraie aux rangs n_0 et $n_0 + 1$.
- **Etape 3 : L'hérédité.** On suppose notre propriété vraie aux rangs n et $n + 1$ pour un certain entier n supérieur à n_0 et on montre que $\mathcal{P}(n + 2)$ est alors vraie.
- **Etape 4 : La conclusion.** On dit alors que $\mathcal{P}(n)$ est vraie aux rangs n_0 et n_0+1 et que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n + 1)$ entraînent $\mathcal{P}(n + 2)$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n supérieur à n_0 d'après le principe de récurrence double.

Si on s'amuse à décrire l'algorithme pour s'assurer que notre preuve est valable pour tous les entiers naturels, cela donne (en supposant $n_0 = 0$ ce qui ne change pas grand chose...) : $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies et $\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1) \Rightarrow \mathcal{P}(2)$ donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie. $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies et $\mathcal{P}(1), \mathcal{P}(2) \Rightarrow \mathcal{P}(3)$ donc $\mathcal{P}(3)$ est vraie...

■ **Cas d'utilisation :**

Par rapport à la récurrence simple, on fait une récurrence double quand on a besoin de $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ pour avoir suffisament d'information pour démontrer $\mathcal{P}(n + 2)$.

■ ***Exemple*** : *On définit la suite* $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *par :* $u_0 = 0, u_1 = 1$ *et pour tout entier naturel* m, $u_{m+2} = 3u_{m+1} - 2u_m$. *Soit* n *un entier naturel, vérifiez que* $u_n = 2^n - 1$.

$2^0 - 1 = 0$, $2^1 - 1 = 1$, $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies. On suppose $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n + 1)$ vraies pour un certain entier n naturel. D'après $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n + 1)$, on a :

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n = 3 \cdot \left(2^{n+1} - 1\right) - 2 \cdot (2^n - 1)$$

D'où :

$$u_{n+2} = 2^{n+1} \cdot (3 - 1) - 3 + 2 = 2^{n+2} - 1$$

ce qu'on voulait... $\mathcal{P}(n + 2)$ est donc vraie si $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n + 1)$ le sont. $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies et pour tout entier naturel, $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ entraînent $\mathcal{P}(n+2)$. $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n naturel d'après le principe de récurrence double.

B) Absurde et Contraposée

MÉTHODE 4 : Comment exprimer $\bar{P}$

■ **Rappel :**
Soient P et Q deux propriétés. On a :

$\overline{P \text{ et } Q} = \overline{P} \text{ ou } \overline{Q}$ $\qquad$ $\overline{P \Longrightarrow Q} = P \text{ et } \overline{Q}$ $\qquad$ $\overline{\exists} = \forall$

$\overline{P \text{ ou } Q} = \overline{P} \text{ et } \overline{Q}$ $\qquad$ $\overline{\forall} = \exists$

Notez que $(P$ et $Q)$ vraie veut dire que les propriétés P et Q sont toutes les deux vraies et que $(P$ ou $Q)$ vraie veut dire soit que les propriétés P et Q sont toutes les deux vraies soit que seule P est vraie soit que seule Q est vraie.

■ **Principe :**
On souhaite nier une propriété P, cela signifie qu'on cherche une propriété Q tel que si Q est vraie alors P est fausse et si Q est fausse alors P est vraie. Pour exprimer cette proposition, on va décomposer P (avec des ou, des et et des implications) en propriétés élémentaires et se servir du rappel juste au-dessus.

■ **Mise en garde :**
Réfléchissez bien ! Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, le contraire de f est paire n'est pas f est impaire mais il existe un réel x tel que $f(x) \neq f(-x)$... (le contraire de f croissante n'est pas f décroissante, le contraire de f positive n'est pas f négative...).

■ ***Exemple*** : *Nier les propositions suivantes :*
1) *Tous les habitants de la rue Pirandello qui portent des lunettes ou des chapeaux sont des grands mathématiciens et auront un bon point avant 30 ans.*
2) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow |U_n - l| < \varepsilon$

1) La proposition "Tous les habitants de la rue Pirandello qui portent des lunettes ou des chapeaux sont des grands mathématiciens et auront un bon point avant 30 ans "peut s'écrire avec des connecteurs logiques :

$\forall$ habitants de la... chapeaux $\Rightarrow$ grands matheux et bon point avant 30

On nie en utilisant le rappel, ça donne donc : Il existe un habitant de la rue Pirandello qui porte des lunettes ou des chapeaux qui n'est pas un grand mathématicien ou qui n'aura pas de bon point avant 30 ans. Si vous dites que cela donne Il existe un habitant de la rue Pirandello qui ne porte pas des lunettes et pas de chapeaux non plus qui n'est pas un grand mathématicien ou qui n'aura pas de bon point avant 30 ans, vous faites une grande faute de logique car vous énoncez une proposition compatible avec celle du début puisque que vous ne parlez pas de la même catégorie de gens (il se peut que dans les habitants de la rue Pirandello, ceux qui portent des lunettes ou des chapeaux sont des grands mathématiciens et auront un bon

point avant 30 ans et que parmi les autres, i.e. parmi ceux qui ne portent ni lunettes ni chapeaux, il y ait un pas grand mathématicien ou un n'ayant pas de bon point avant 30 ans...Capiche ? Sinon, re(ou rere)lisez ce paragraphe !
2) La négation de $\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow |U_n - l| < \varepsilon$ est :

$$\exists\varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall n_0, \exists n \in \mathbb{N} \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geqslant n_0 \text{ et } |U_n - l| \geqslant \varepsilon$$

De nouveau, si vous avez mis $\varepsilon \leqslant 0$ ou $n < n_0$, vous ne parlez pas de la même catégorie !

MÉTHODE 5 : L'absurde

■ Principe :
Soient P et Q deux propositions. On souhaite démontrer que P implique Q. Le raisonnement par l'absurde consiste à supposer P vraie et Q fausse i.e. (pour id est signifiant c'est-à-dire chez Virgile) "non Q" vraie). Le but est d'aboutir à une contradiction. On pourra alors conclure que l'hypothèse P vraie et Q fausse est une hypothèse fausse, ce qui signifie que P implique Q.

■ Remarque :
Dans un raisonnement par l'absurde comme dans un raisonnement par contraposée, on a besoin d'être capable d'énoncer la propriété "non Q" en connaissant Q. Comment faire ? Et bien regardez la prochaine méthode, on vous a bien prémaché le boulot... Bon appétit !

■ ***Exemple*** : *Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. On suppose que f ne s'annule pas sur I. Montrer par l'absurde que f est de signe constant sur I.*

On suppose donc que f ne s'annule pas sur I, est continue sur I et change de signe sur I. Il existe donc a un élément de I tel que $f(a) < 0$ et b un élément de I tel que $f(b) > 0$. On a $f(b)f(a) < 0$ et f continue donc f s'annule entre a et b d'après le théorème des valeurs intermédiaires. (Absurde)

MÉTHODE 6 : La contraposée

■ Principe :
C'est un raisonnement proche du raisonnement par l'absurde... mais ce n'est pas le raisonnement par l'absurde. Pour démontrer que P implique Q, on suppose "non Q" vraie et on prouve que "non P" est alors vraie. On peut alors conclure que, par contraposée, P implique Q car on a équivalence entre $P \Rightarrow Q$ et $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$ ($\bar{P}$ désignant la proposition "non P").

■ ***Exemple*** **:** *Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. On suppose que f ne s'annule pas sur I. Montrer par contraposée que f est de signe constant sur I.*

On suppose donc que f ne s'annule pas sur I et est continue sur I. On suppose que f n'est pas de signe constant sur I, montrons que f s'annule sur I. f n'est pas de signe constant sur I donc il existe a un élément de I tel que $f(a) < 0$ et b un élément de I tel que $f(b) > 0$. On a $f(b)f(a) < 0$ et f continue donc f s'annule entre a et b d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Par contraposée, on a donc prouvé que si f ne s'annule pas sur I alors f est de signe constant sur I.

C) Preuve d'existence et d'unicité en même temps

D'abord, on va vous parler un peu du raisonnement par équivalence et on reviendra après sur ce problème d'existence et d'unicité...

MÉTHODE 7 : L'équivalence

■ **Principe :**
Pour montrer que $P \iff Q$ avec P et Q deux propositions, il y a deux grandes techniques :

1. Soit on procéde en deux temps, on montre que $P \Longrightarrow Q$ puis on prouve que $Q \Longrightarrow P$.
2. Soit on raisonne directement par équivalence. C'est le cas, entre autres, si on a à notre disposition des fonctions bijectives ($x \mapsto e^x$par exemple...) ou si on résout un système par opérations élémentaires...

La prudence recommande en général de procéder en deux temps... Au moins, on est sûr de ne pas se tromper. Ainsi, si on vous demande une condition nécessaire et suffisante pour qu'une propriété soit vérifiée, il est plus simple de supposer la propriété vérifiée et d'en tirer les conséquences. Une fois qu'on est allé au bout des conséquences, on tente de remonter, tel le saumon, vers le point de départ.

■ **Vocabulaire :**
Quelques petites précisions :

1. Ne confondez pas (surtout à l'oral, cela peut aller vite...) "il faut","il suffit" et "il faut et il suffit". Illustrons en supposant $P \Longrightarrow Q$. On a alors : Pour avoir Q vraie, il suffit d'avoir P vraie mais on peut avoir Q vraie sans que P le soit. Ainsi, il suffit d'avoir $x = -5$ pour avoir $x^2 = 25$. P est une condition suffisante pour Q. De l'autre côté, pour avoir P vraie, il faut obligatoirement avoir Q vraie. Si Q ne l'est pas, on sait que P ne le sera pas. On dit que Q est une condition nécessaire pour P.

   Pour vous aider à mieux choisir vos mots, le plus simple est de vous dresser une liste de termes signifiant l'équivalence, la condition nécessaire ou la condition suffisante.