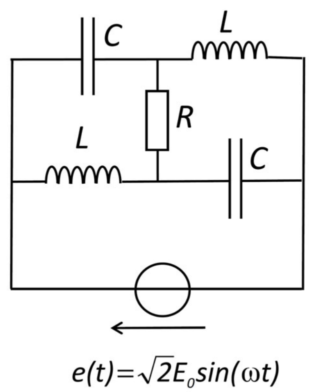
Jour n^{o}1

Exercice 1.1

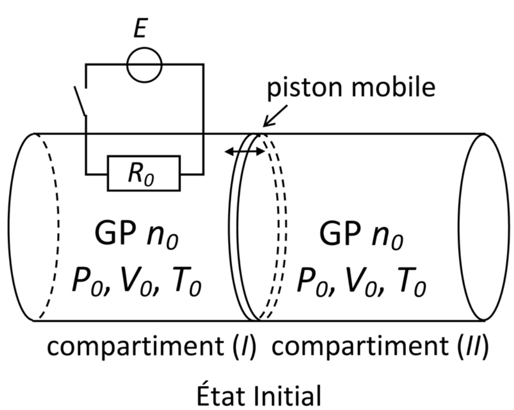
Le circuit représenté ci-dessous est alimenté par une source de tension de la forme $e(t) = \sqrt{2}E_0 \sin(\omega t)$.



On pose $x = LC\omega^2$. Déterminer le courant $i(t)$ traversant le conducteur ohmique de résistance R, en prenant $x = 1$.

Exercice 1.2

Un cylindre calorifugé horizontal est divisé en deux compartiments (I) et (II) par un piston lui aussi calorifugé pouvant se déplacer sans frottement. À l'état initial, chaque compartiment contient $n_0 = 1$ mol d'un même gaz parfait (γ connu) dans les mêmes conditions de température et de pression (T_0, P_0).



Un conducteur ohmique de résistance R_0, de capacité thermique négligeable et parcouru par un courant d'intensité I pendant une durée Δt permet de chauffer lentement le gaz du compartiment (I). Un thermomètre, placé dans le compartiment (II) permet d'y mesurer la température du gaz : à l'état final, $T_2 > T_0$.

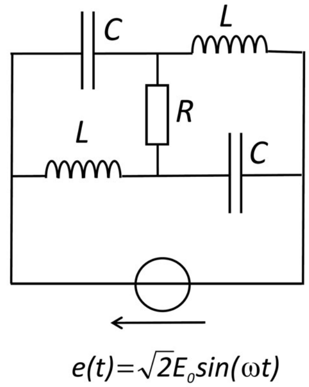
1) Déterminer en fonction de n_0, P_0, T_2, γ et R, constante des gaz parfaits, les expressions des paramètres d'état (P_i, V_i, T_i) du gaz dans chaque compartiment.

2) Pour chaque gaz, déterminer la variation d'énergie interne et le travail échangé. Préciser la puissance dissipée par la résistance au gaz du compartiment (I).

3) Tracer dans le plan (V,P) la transformation subie par chacun des gaz.

Énoncé

Le circuit représenté ci-dessous est alimenté par une source de tension de la forme $e(t) = \sqrt{2}E_0\sin(\omega t)$.



On pose $x = LC\omega^2$. Déterminer le courant $i(t)$ traversant le conducteur ohmique de résistance R, en prenant $x = 1$.

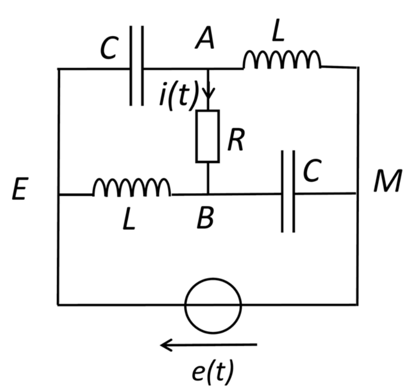
Analyse stratégique de l'énoncé

Il s'agit, dans cet exercice, d'étudier le comportement d'un circuit *linéaire en régime sinusoïdal forcé*.
Dans ce cas, on cherche d'abord à exprimer l'intensité du courant complexe $\underline{i}$ en fonction de la tension complexe $\underline{e}$ en appliquant les mêmes lois et méthodes qu'en régime continu. Attention ! Le courant d'intensité i n'étant pas nul, les formules du pont diviseur de tensions ne sont pas applicables ici (contrairement à la situation classique de l'étude d'un pont (type Hay, Wheastone-Maxwell,...) que l'on chercherait à équilibrer.

$\hookrightarrow$ Après avoir dénombré les inconnues et déterminé ainsi le nombre d'équations nécessaires à l'obtention de l'intensité du courant complexe, on détermine son expression réelle en calculant module et argument.

Corrigé

Avant toute chose, on nomme E, M, A et B les quatre nœuds apparaissant dans le circuit. On oriente ensuite le courant d'intensité i (sens non précisé) de sorte qu'il traverse le conducteur ohmique de A vers B, ce choix étant bien entendu arbitraire.



Comme le circuit étudié est *linéaire* et *en régime sinusoïdal* forcé, $i(t)$ est de la forme $i(t) = \sqrt{2} I_0 \sin(\omega t + \varphi)$.

Nous allons donc travailler avec les grandeurs complexes associées à $e(t)$, $i(t)$ et à toute autre grandeur temporelle intervenant dans le circuit.

Ainsi

$$\underline{e}(t) = \underline{E} e^{j\omega t}$$

avec une amplitude complexe $\underline{E} = \sqrt{2} E_0$ (ici réelle) ;
et

$$\underline{i}(t) = \underline{I} e^{j\omega t}$$

avec une amplitude complexe $\underline{I} = \sqrt{2} I_0 e^{j\varphi}$ dont $\sqrt{2} I_0$ est le module et φ, l'argument.

∘ Pour déterminer totalement $i(t)$, il est nécessaire de connaître $\underline{I}$. Pour cela, cherchons la relation reliant $\underline{i}(t)$ à $\underline{e}(t)$.

Appliquons tout d'abord la loi d'Ohm aux bornes du conducteur ohmique (convention récepteur) :

$$R\underline{i} = \underline{V}_A - \underline{V}_B$$

où $\underline{V}_A$ et $\underline{V}_B$ sont des inconnues. Nous devons donc rechercher deux équations indépendantes. Comme le circuit est linéaire, nous pouvons utiliser les lois de l'électrocinétique.

Posons $\underline{Z}_L = j\,L\omega$ et $\underline{Z}_C = \dfrac{1}{\underline{Y}_C} = \dfrac{1}{j\,C\omega}$.

→ Appliquons la loi des nœuds en terme de potentiel en A :

$$\frac{\underline{V}_E - \underline{V}_A}{\underline{Z}_C} + \frac{\underline{V}_M - \underline{V}_A}{\underline{Z}_L} + \frac{\underline{V}_B - \underline{V}_A}{R} = 0$$

D'où :

$$\underline{V}_A \left(\frac{1}{\underline{Z}_C} + \frac{1}{\underline{Z}_L} + \frac{1}{R} \right) = \frac{\underline{V}_E}{\underline{Z}_C} + \frac{\underline{V}_M}{\underline{Z}_L} + \frac{\underline{V}_B}{R}. \tag{1}$$

→ De même, appliquons la loi des nœuds en terme de potentiel en B :

$$\frac{\underline{V}_E - \underline{V}_B}{\underline{Z}_L} + \frac{\underline{V}_M - \underline{V}_B}{\underline{Z}_C} + \frac{\underline{V}_A - \underline{V}_B}{R} = 0.$$

D'où :

$$\underline{V}_B \left(\frac{1}{\underline{Z}_C} + \frac{1}{\underline{Z}_L} + \frac{1}{R} \right) = \frac{\underline{V}_E}{\underline{Z}_L} + \frac{\underline{V}_M}{\underline{Z}_C} + \frac{\underline{V}_A}{R}. \tag{2}$$

Calculons (1) − (2) afin de faire apparaître l'intensité $\underline{i} = \dfrac{\underline{V}_A - \underline{V}_B}{R}$ et la tension $\underline{e} = \underline{V}_E - \underline{V}_M$:

$$\begin{aligned}
(\underline{V}_A - \underline{V}_B)\left(\frac{1}{\underline{Z}_C} + \frac{1}{\underline{Z}_L} + \frac{1}{R}\right) &= \frac{\underline{V}_E}{\underline{Z}_C} + \frac{\underline{V}_M}{\underline{Z}_L} + \frac{\underline{V}_B}{R} - \left(\frac{\underline{V}_E}{\underline{Z}_L} + \frac{\underline{V}_M}{\underline{Z}_C} + \frac{\underline{V}_A}{R}\right)\\
\Rightarrow (\underline{V}_A - \underline{V}_B)\left(\frac{1}{\underline{Z}_C} + \frac{1}{\underline{Z}_L} + \frac{1}{R}\right) &= \frac{\underline{V}_E - \underline{V}_M}{\underline{Z}_C} + \frac{\underline{V}_M - \underline{V}_E}{\underline{Z}_L} + \frac{\underline{V}_B - \underline{V}_A}{R}\\
\Rightarrow (\underline{V}_A - \underline{V}_B)\left(\frac{1}{\underline{Z}_C} + \frac{1}{\underline{Z}_L} + \frac{2}{R}\right) &= \frac{\underline{V}_E - \underline{V}_M}{\underline{Z}_C} + \frac{\underline{V}_M - \underline{V}_E}{\underline{Z}_L}\\
\Rightarrow R\,\underline{i}\left(\frac{1}{\underline{Z}_C} + \frac{1}{\underline{Z}_L} + \frac{2}{R}\right) &= \underline{e}\left(\frac{1}{\underline{Z}_C} - \frac{1}{\underline{Z}_L}\right)\\
\Rightarrow \underline{i} &= \underline{e}\,\frac{\dfrac{1}{\underline{Z}_C} - \dfrac{1}{\underline{Z}_L}}{\dfrac{R}{Z_C} + \dfrac{R}{\underline{Z}_L} + 2}\\
\Rightarrow \underline{i} &= \underline{e}\,\frac{\dfrac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_C} - 1}{R\dfrac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_C} + R + 2\underline{Z}_L}.
\end{aligned}$$

Avec $\underline{Z}_L = j\,L\omega$ et $\underline{Z}_C = \dfrac{1}{j\,C\omega}$, on obtient :

$$\underline{i} = \underline{e}\,\frac{-LC\omega^2 - 1}{R(1 - LC\omega^2) + 2j\,L\omega} \tag{3}$$

soit

$$\underline{I}e^{j\omega t} = \underline{E}e^{j\omega t}\,\frac{-(1 + LC\omega^2)}{R(1 - LC\omega^2) + 2j\,L\omega}.$$

Finalement, après simplification,

$$\boxed{\underline{I} = \underline{E}\,\frac{1 + LC\omega^2}{R(LC\omega^2 - 1) - 2j\,L\omega}} \tag{4}$$

et en posant $x = LC\omega^2$,

$$\underline{I} = \underline{E}\,\frac{1 + x}{R(x - 1) - 2jL\omega}. \tag{5}$$

○ L'expression de l'amplitude complexe étant maintenant connue, identifions son module et son argument.

$$\rightarrow \sqrt{2}I_0 = \mid \underline{I} \mid = \mid \underline{E} \mid \left|\frac{1 + x}{R(x - 1) - 2jL\omega}\right| \Rightarrow \sqrt{2}I_0 = \sqrt{2}E_0\frac{1 + x}{\sqrt{R^2(x - 1)^2 + 4L^2\omega^2}}$$

$$\rightarrow \varphi = arg(\underline{I}) = \underbrace{arg(\underline{E})}_{=0} + \underbrace{arg(1 + x)}_{=0} - arg\left(R(x - 1) - 2jL\omega\right)$$

$$\Rightarrow \tan\varphi = -\frac{-2L\omega}{R(x - 1)} = \frac{2L\omega}{R(x - 1)} \qquad \text{avec } \sin\varphi > 0 \text{ puisque } Im[\underline{D}_{\text{én}}] < 0.$$

Plus précisément $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ si $x < 1$ et $\varphi \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ si $x > 1$.

Ainsi, pour la convention d'orientation choisie pour i, $i(t)$ est *en avance* sur $e(t)$ $\forall\,\omega$.

∘ Remarque :

Le signe de la partie réelle au dénominateur est indéterminé puisqu'il dépend de la valeur x, donc de ω. Ainsi, pour déterminer la valeur de φ connaissant $\tan\varphi$, il est nécessaire de préciser le signe de $\sin\varphi$ en raisonnant sur le signe de la partie imaginaire du dénominateur.
Il est aussi possible de lever l'ambiguïté sur le signe de la partie réelle en réécrivant l'équation (5) sous la forme :

$$\underline{I} = \underline{E}\,\frac{j(1+x)}{jR(x-1)+2L\omega}.$$

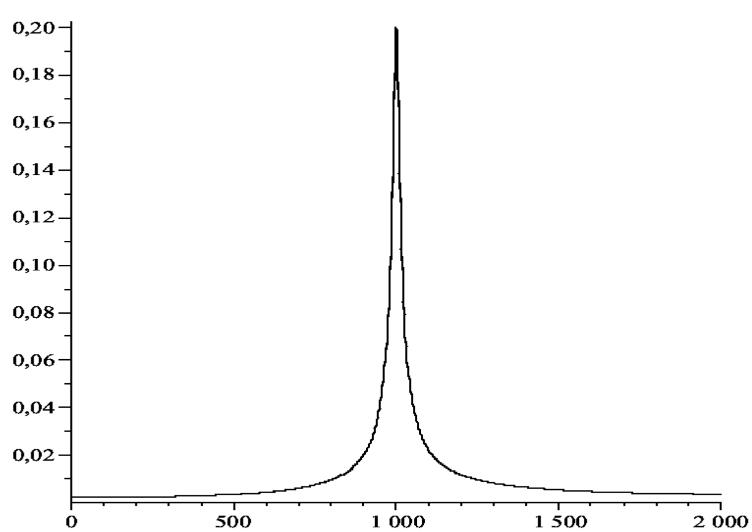
Dans ce cas,

$$\varphi = \underbrace{arg(\underline{E})}_{=0} + arg(j(1+x)) - arg(2L\omega + j(R(x-1)) \Rightarrow \varphi = +\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{R(1-x)}{2L\omega}\right),$$

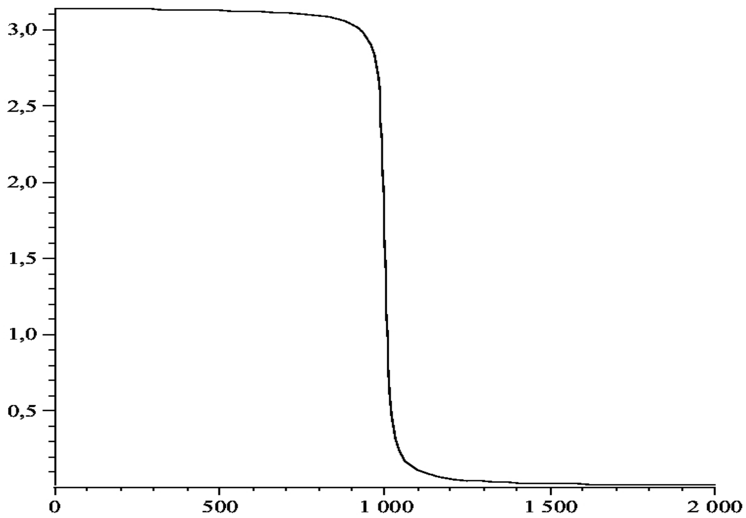
ce qui est bien équivalent au résultat obtenu précédemment.

Pour $x = 1$ ou encore $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$,
→ le module est maximal et vaut $\sqrt{2}I_0 = \sqrt{2}E_0\frac{2}{2L\omega} = \sqrt{\frac{2C}{L}}E_0$;
→ l'argument prend la valeur particulière $\varphi = \frac{\pi}{2}$,

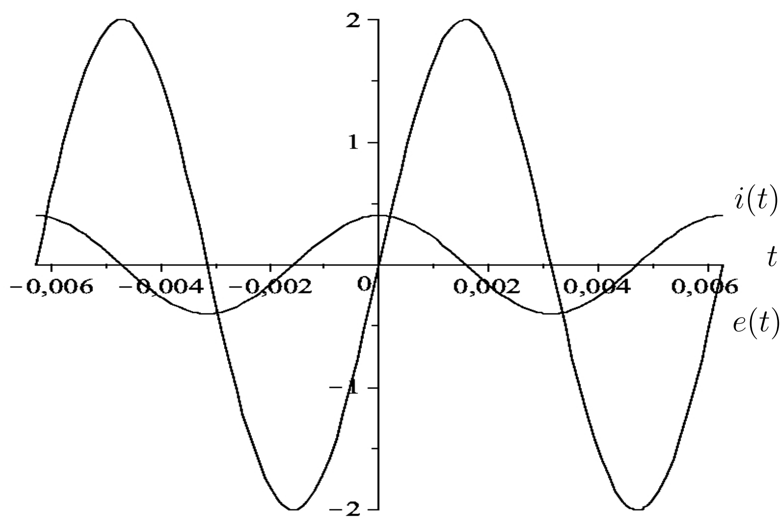
ce que confirment les graphes suivants, tracés pour $R = 470\ \Omega$, $L = 5$ mH et $C = 200\ \mu$F :



module

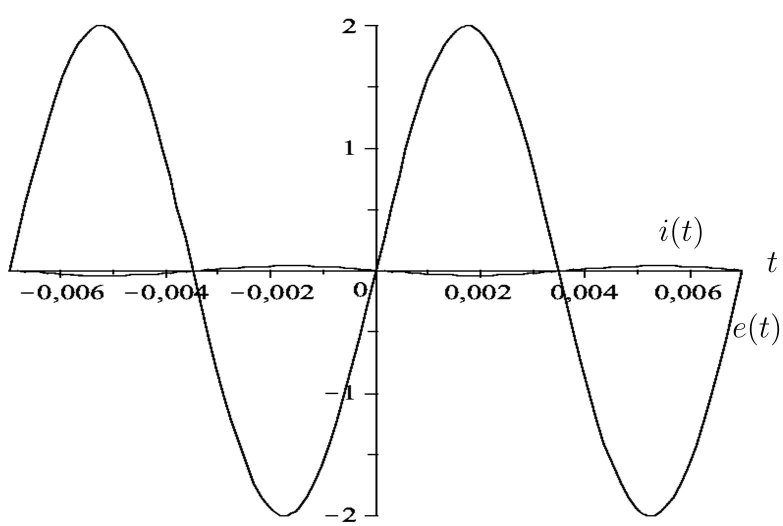


argument

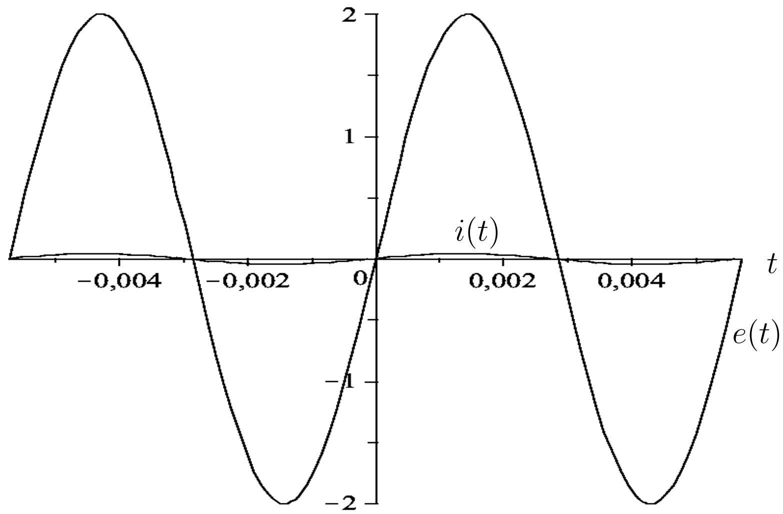


pour $\omega = 1000 = \omega_0$

En outre, on peut vérifier que, $\forall\,\omega$, $i(t)$ coupe l'axe des temps avant le signal $e(t)$; $i(t)$ est donc en avance sur $e(t)$ quelle que soit ω. Le graphe ci-dessus montre en particulier que $i(t)$ est en quadrature avance sur $e(t)$ pour $\omega = \omega_0$.



pour $\omega = 900 < \omega_0$



pour $\omega = 1100 > \omega_0$

On retrouve que pour $\omega \to 0$, $i(t)$ et $e(t)$ sont en opposition de phase et en phase pour $\omega \to \infty$.

Revenons enfin à la grandeur réelle :

$$i(t) = \sqrt{\frac{2C}{L}} E_0 \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}).$$

Finalement,

> Lorsque $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, l'intensité du courant traversant la résistance de A vers B s'écrit $i(t) = \sqrt{\dfrac{2C}{L}} E_0 \cos(\omega t)$. Elle est en quadrature avance sur $e(t)$ et son amplitude est maximale.

Techniques à mémoriser

♡ Il faut se souvenir que pour déterminer l'expression d'un courant ou d'une tension $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ en régime sinusoïdal, on détermine la grandeur complexe $\underline{x}$ correspondante en appliquant les mêmes lois et méthodes qu'en régime continu ; une fois l'amplitude complexe $\underline{X}$ obtenue, on identifie son module X_m ($\Leftrightarrow$ l'amplitude réelle de $x(t)$) ainsi que son argument φ ($\Leftrightarrow$ la phase à l'origine de $x(t)$).
Attention, cette méthode de résolution en notations complexes ne s'applique qu'à des systèmes linéaires (théorème de superposition applicable).