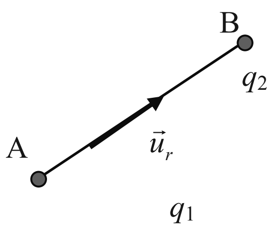
Chapitre I

Les équations de MAXWELL

1- ELECTROSTATIQUE

1.1 Loi de COULOMB

L'expérience de base de l'électrostatique a été réalisée par COULOMB en 1785, en utilisant de petits objets chargés pouvant être considérés comme des charges ponctuelles. Les résultats de ces expériences ont conduit à la loi de Coulomb, qui dit que la force entre deux charges ponctuelles q_1 et q_2 est proportionnelle au produit des charges et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare :



$$\vec{F} = K\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}_r\,, \qquad \text{(I-1)}$$

où $\vec{u}_r$ est le vecteur unitaire du vecteur $\vec{AB}$. La force $\vec{F}$ s'exprime en newtons (N) et K, une constante de proportionnalité, est donnée dans le système international (SI) par :

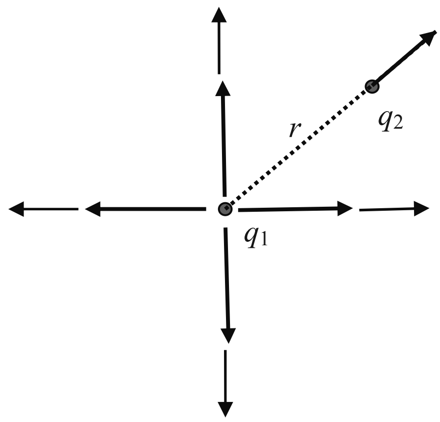
$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\,, \qquad \text{(I-2)}$$

où ε est la permittivité diélectrique du milieu dans lequel les charges sont situées.
ε, aussi appelée *constante diélectrique*, a la dimension d'une capacité par unité de longueur (F/m).
La permittivité du vide est désignée par ε_0 et sa valeur est :

$$\varepsilon_0 \approx \frac{1}{36\pi}10^{-9}F/m\,. \qquad \text{(I-3)}$$

1.2 Champ électrique

Considérons une charge $q_1 > 0$ située à l'origine d'un repère (coordonnées polaires ou sphériques). Si une autre charge $q_2 > 0$ est amenée au voisinage de q_1, elle subira une force.



On dit que la charge q_1 est entourée par un champ, c'est à dire une région dans laquelle des forces peuvent agir. La nature de ce champ est indiquée par le diagramme ci-contre, la longueur du vecteur est proportionnel à la force en ce point.

Lignes de champ : lignes tangentes au champ électrique en chaque point.
Si q_2 est une charge test positive, la force par unité de charge est définie comme étant le champ électrique $\vec{E}$:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_2} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{u}_r . \qquad \text{(I-4)}$$

Principe de superposition :
Puisque le champ électrique créé par une charge est une fonction linéaire de la valeur de la charge, alors le champ de plusieurs charges est obtenu en faisant une addition vectorielle des composantes de champ créé par chaque charge successivement agissant seule. Le champ $\vec{E}$ créé en un point par un ensemble de charges s'écrit $\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i$, où $\vec{E}_i$ est le champ créé par la charge q_i seule.

1.3 Le potentiel électrique

Soit une charge test q_0 plongée dans le champ électrique $\vec{E}$ créé par une distribution quelconque de charges. Le travail W qu'il faut fournir contre la force électrique pour déplacer la charge test d'un point a vers un point b est donnée par :

$$W = -\int_a^b \vec{F} d\vec{l} , \qquad \text{(I-5)}$$

$\vec{F}$: force électrique exercée sur la charge en tous points du parcours.

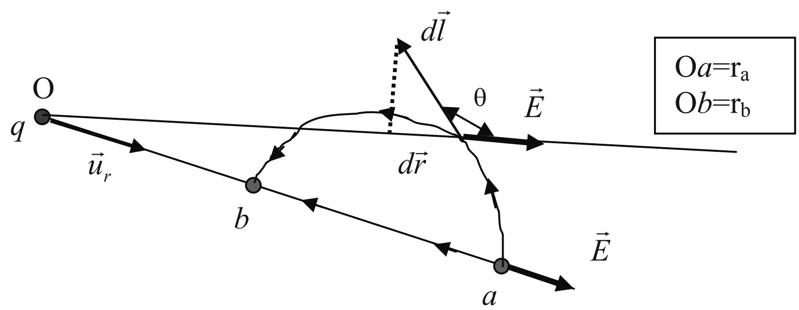
$\vec{dl}$: différentielle du vecteur déplacement le long du chemin menant de *a* vers *b*.

<u>Convention</u> : $W>0$ on fournit du travail ; $W<0$ on reçoit du travail.

De plus on suppose que q_0 est une charge unité, <u>l'énergie par unité de charge</u> qu'il faut développer pour déplacer la charge test est :

$$W_{unité} = -\int_a^b \vec{E}\vec{dl} \quad \text{car} \quad \vec{F} = q_0\vec{E}\,. \qquad \text{(I-6)}$$

Montrons que cette intégrale ne dépend pas du chemin choisi pour aller de *a* vers *b*.



<u>Premier cas</u> : parcours rectiligne

$$W_{unité} = -\int_a^b \vec{E}\vec{dl} = -\int_a^b -Edl \quad \text{or } dl=-dr \qquad \rightarrow W_{unité} = -\int_{r_a}^{r_b} Edr = -\int_{r_a}^{r_b} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

$$\rightarrow\ W_{unité} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right].$$

<u>Deuxième cas</u> : parcours curviligne

$$W_{unité} = -\int_a^b \vec{E}\vec{dl} = -\int_a^b -Edl\cos\theta \quad \text{or } -dr = dl\cos(\pi-\theta) \rightarrow\ dr = dl\cos\theta$$

$$\rightarrow\ W_{unité} = -\int_{r_a}^{r_b} Edr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right].$$

On obtient le même résultat que pour le parcours rectiligne.

En conclusion, on peut dire que le travail qu'il faut fournir pour déplacer une charge unité de *a* vers *b* ne dépend pas du parcours, mais dépend seulement de la position des deux points *a* et *b*. On définit alors la différence de potentiel électrique, entre les deux points *a* et *b*, comme le travail par unité de charge pour amener une charge positive de *a* et *b* :

$$V(b) - V(a) = -\int_a^b \vec{E}d\vec{l} \ . \qquad \text{(I-7)}$$

Remarque :
Si le parcours est fermé on en déduit que la circulation du champ électrique sur un parcours fermé est égale à zéro :

$$\oint \vec{E}d\vec{l} = 0 .$$

Potentiel absolu :
Si le point *a* se trouve à l'infini, où le potentiel est nul par définition, alors le potentiel absolu du point b est donné par :

$$V(b) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_b} .$$

Plus généralement le potentiel en un point situé à la distance *r* d'une charge *q* s'écrit :

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} . \qquad \text{(I-8)}$$

Il est utile de noter que le potentiel *V*(*r*) est par définition le travail par unité de charge qu'il faut fournir, pour amener une charge *q* de l'infini à la position *r*. L'unité de potentiel électrique dans le système SI est le *volt* (V) est égale à un joule/coulomb.

Remarque :
Si la charge est déplacée dans une direction perpendiculaire à $\vec{E}$, il n'y a pas de travail développé ($\vec{E}d\vec{l} = 0$) et ce parcours est appelé *ligne équipotentielle*. Cela est une propriété importante des champs : les équipotentielles et les lignes de champs sont orthogonales.
On va déterminer maintenant l'expression qui permet de déterminer le champ électrique $\vec{E}(x, y, z)$ à partir de la connaissance du potentiel électrique $V(x, y, z)$.

$$dV = -\vec{E}d\vec{l} \quad \rightarrow \quad dV = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz)$$

$$\text{or } dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

En identifiant les deux expressions de dV on obtient les composantes du champ électrique :

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}; E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} .$$

On reconnaît l'opérateur vectoriel gradient qui permet finalement d'écrire,

$$\vec{E} = -\vec{grad}(V) = -\vec{\nabla} V\,, \tag{I-9}$$

où l'opérateur $\vec{\nabla}$ (nabla) est défini par l'identité suivante :

$$\vec{\nabla} \equiv \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\,, \tag{I-10}$$

où ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) sont les vecteurs unitaire du repère orthonormé Oxyz.

1.4 Flux du champ électrique-théorème de GAUSS

Flux d'un champ de vecteur :
Soit une surface (*S*) dans une région de l'espace où existe un champ de vecteur $\vec{F}$. On décompose cette surface en éléments de surface très petits $dS_1, dS_2, ...$ que l'on peut assimiler à des fractions de plans. Nous associons à chaque surface élémentaire dS_i un vecteur unitaire $\vec{u}_i$ qui lui est perpendiculaire. On définit ainsi les éléments de surfaces orientées $d\vec{S}_i = \vec{u}_i dS_i$. Le champ de vecteur $\vec{F}$ est caractérisé par les vecteurs $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ...$ sur chaque surface élémentaire $d\vec{S}_1, d\vec{S}_2, ...$.
Par définition, on appelle « flux du champ de vecteur $\vec{F}$ » à travers la surface (*S*) la quantité suivante :

$$\phi = \sum_i \vec{F}_i d\vec{S}_i = \vec{F}_1 d\vec{S}_1 + \vec{F}_2 d\vec{S}_2 + ... \tag{I-11}$$

ou bien $\phi = \iint_{(S)} \vec{F} d\vec{S}$. (I-12)

Convention : $\phi > 0$ flux sortant
$\phi < 0$ flux entrant

Flux du champ électrique :
Calculons le flux du champ électrique, créé par une charge ponctuelle *q*, à travers une surface (*S*) qui l'entoure. La charge est située dans un milieu dont de permittivité diélectrique ε. Considérons le cas particulier où la surface (*S*) est une sphère de rayon *r* centrée sur la charge *q*. Le champ créé en tout point de la sphère est :

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \frac{\vec{u}_r}{r^2}\,. \tag{I-13}$$

Le flux du champ électrique s'écrit :

$$\phi_E = \iint_{(S)} \vec{E}d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\iint_{(S)} \vec{u}_r d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\iint_{(S)} dS \,.$$

L'intégrale double représente la surface d'une sphère de rayon r, soit $4\pi r^2$. On obtient finalement :

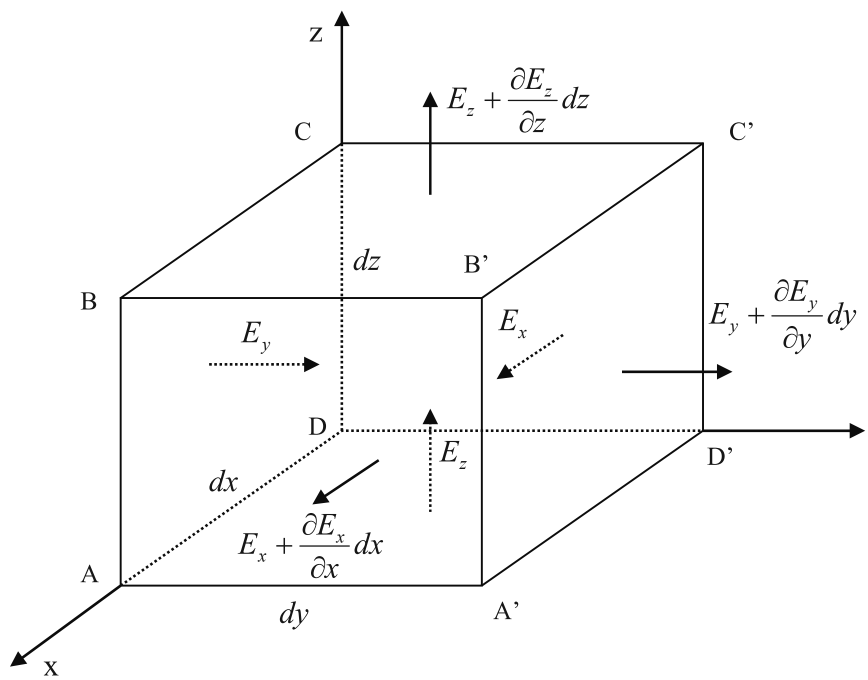
$$\phi_E = \frac{q}{\varepsilon}\,. \qquad \text{(I-14)}$$

Il faut noter que la relation (I-14) demeure vraie pour une surface quelconque fermée entourant q.
Théorème de GAUSS :
Si la surface fermée (S) entoure plusieurs charges $q_1, q_2, ...$ alors le flux du champ électrique à travers (S) s'exprime par :

$$\iint_{(S)} \vec{E}d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon}\sum_i q_i \,. \qquad \text{(I-15)}$$

1.5 Forme différentielle du Théorème de GAUSS

Le théorème de Gauss peut être appliqué à une surface quelconque. Appliquons le à une surface limitant un volume infinitésimal dont les cotés de longueur dx, dy et dz sont parallèles aux axes Ox, Oy et Oz, respectivement. Ce volume infinitésimal est placé dans un champ électrique $\vec{E}$ de composantes E_x, E_y et E_z.



La composante <u>normale sortante</u> du champ électrique sur la face ABCD est $-E_y$ puisque le champ est entrant. Si la valeur du champ change de la face ABCD à la face A'B'C'D', la composante normale de $\vec{E}$ sur la face A'B'C'D' peut être représentée par une série de Taylor :

$$E_y + \frac{\partial E_y}{\partial y}\frac{dy}{1} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2}\frac{dy^2}{2!} + \frac{\partial^3 E_y}{\partial y^3}\frac{dy^3}{3!} + \ldots$$

Si on néglige les termes d'ordre supérieur, la composante normale de $\vec{E}$ sur la face A'B'C'D' s'exprime par :

$$E_y + \frac{\partial E_y}{\partial y} dy \,. \qquad \text{(I-17)}$$

Flux sur la face ABCD : $-E_y dxdz$

Flux sur la face A'B'C'D' : $\left(E_y + \frac{\partial E_y}{\partial y} dy\right) dxdz$

En procédant de manière similaire pour toutes les faces de la boite on obtient le flux total :

$$\begin{aligned}\phi_E &= \left(E_y + \frac{\partial E_y}{\partial y} dy\right) dxdz - E_y dxdz \\ &+ \left(E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx\right) dydz - E_x dydz \\ &+ \left(E_z + \frac{\partial E_z}{\partial z} dz\right) dxdy - E_z dxdy\end{aligned}$$

Soit finalement :

$$\phi_E = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) dxdydz \,. \qquad \text{(I-18)}$$

D'après le théorème de Gauss $\phi_E = \frac{dq}{\varepsilon}$ où dq est la charge renfermée par la boite infinitésimale qui s'écrit $dq = \rho dxdydz$, où ρ est la densité de charge dans la boite. On Finalement, le théorème de GAUSS sous sa forme locale s'exprime par l'équation différentielle suivante :

$$div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon}, \qquad \text{(I-19)}$$

$$\text{ou } \ \vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}. \qquad \text{(I-20)}$$

L'application du théorème de Gauss à une surface fermée (*S*) entourant un volume *V* permet d'écrire :

$$\iint_{(S)} \vec{E}d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon} = \iiint_{(V)} \frac{\rho}{\varepsilon} dV ,$$

et si l'on tient compte de l'équation (I-19) on obtient le théorème d'OSTROGRADSKY ou théorème de la divergence :

$$\iint_{(S)} \vec{E}d\vec{S} = \iiint_{(V)} div(\vec{E})dV . \tag{I-21}$$

Le théorème d'Ostrogradsky est bien utile pour transformer une intégrale de surface en intégrale de volume et vice versa.

Equation de POISSON :
Si dans l'équation (I-20) on introduit la relation entre le champ électrique et le potentiel électrique, $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$, alors le théorème de Gauss sous forme différentielle conduit à :

$$\vec{\nabla}(-\vec{\nabla}V) = \frac{\rho}{\varepsilon} = -\vec{\nabla}^2 V ,$$

puis à l'équation de POISSON :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon} = 0 , \tag{I-22}$$

où Δ est l'opérateur *laplacien scalaire* ($\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$).

En absence de charge ($\rho = 0$), l'équation de Poisson devient l'équation de LAPLACE qui s'écrit :

$$\Delta V = 0 . \tag{I-23}$$

1.6 Le vecteur induction électrique

Le champ électrique produit en un point par une charge ponctuelle *q*, à la distance *r*, est donnée par l'équation suivante :

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2} \vec{u}_r . \tag{I-24}$$

L'équation précédente montre que l'intensité du champ électrique dépend du milieu dans lequel la charge q est plongée. Cependant, si nous multiplions par