Chapitre I

Propagation de la lumière par faisceaux

Dans ce chapitre nous considérerons un cas concret de propagation des OEM par faisceaux à travers le cas particulier des faisceaux de lumière LASER. Cependant, il faut avoir à l'esprit qu'il existe d'autres types de faisceaux: radioélectrique (antennes paraboliques, communication avec les satellites) ou acoustique (SONAR, imagerie médicale à ultra-sons).

1- DEFINITIONS

Comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents la lumière est caractérisée par deux quantités vectorielles que sont le champ électrique et magnétique qui lui sont associés. Cependant dans un grand nombre de circonstances, il est possible de décrire la lumière par une fonction scalaire, appelée *fonction d'onde* et notée $u(\vec{r},t)$ vérifiant l'équation d'onde suivante:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad \text{(I-1)}$$

où ∇^2 est l'opérateur laplacien, soit $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$.

Par la suite, on ne précisera pas la signification exacte de cette fonction d'onde qui se rapporte en fait à n'importe quelle composante du champ électrique $\vec{E}$ ou du champ magnétique $\vec{B}$. Un point quelconque de l'espace est repéré par le vecteur position $\vec{r} = (x, y, z)$.

Par la suite nous allons considérer une onde monochromatique représentée par une fonction d'onde ayant une dépendance temporelle exprimée par une fonction harmonique (cosinus ou sinus) :

$$u(\vec{r},t) = a(\vec{r}).\cos[2\pi\nu t + \varphi(\vec{r})] \qquad \text{(I-2)}$$

$a(\vec{r})$ $\rightarrow$ amplitude

$\varphi(\vec{r})$ $\rightarrow$ phase

$\nu \rightarrow$ fréquence (Hz)

$\omega = 2\pi\nu$ $\rightarrow$ pulsation ou fréquence angulaire (rad/s)

Remarque : Dans la pratique, il est rare de rencontrer des ondes monochromatiques et on peut se poser la question sur l'intérêt de considérer ce type d'onde. Puisque qu'une onde dans le cas général possède une certaine étendue (largeur) spectrale qui peut être vue comme la superposition d'ondes monochromatiques (Théorème de Fourier), alors on voit tout l'intérêt qu'il y a à considérer le comportement d'une de ses fréquences qui correspond à une onde monochromatique. C'est la même démarche qui prévaut dans l'étude des circuits électriques comportant les éléments de base résistance, inductance et capacité. Il faut ajouter que cette démarche qui consiste à décomposer une OEM en une somme de sinusoïdes et à assimiler le comportement de l'ensemble à la somme des comportements des composantes monochromatiques est justifié par la linéarité de l'équation (I-1). Cela signifie que si $u_1(\vec{r},t)$ et $u_2(\vec{r},t)$ sont des ondes, c'est à dire obéissent à l'Eq. (I-1), alors $u_1(\vec{r},t)+u_2(\vec{r},t)$ est aussi une onde.

1.1 Fonction d'onde complexe

Les équations de Maxwell qui régissent les champs électrique et magnétique sont des équations différentielles qui se transforment en équations trigonométriques si les champs sont harmoniques selon l'Eq. (I-2). Par contre les équations de Maxwell se transforment en équations algébriques si l'on introduit la notion de fonction d'one complexe en transformant l'équation (I-2) sous la forme suivante :

$$U(\vec{r},t) = a(\vec{r},t).e^{i\varphi(\vec{r})}.e^{i\omega t}, \tag{I-3}$$

tel que :

$$u(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\{U(\vec{r},t)\} = \frac{1}{2}\{U(\vec{r},t) + U^*(\vec{r},t)\}. \tag{I-4}$$

Dans l'équation précédente le symbole $*$ désigne le complexe conjugué. La fonction $U(\vec{r},t)$ est appelée *fonction d'onde complexe* qui obéit à l'équation d'onde

$$\nabla^2 U = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \tag{I-5}$$

1.2 Amplitude complexe

La fonction d'onde complexe (Eq. I-3) peut être écrite sous la forme d'un produit de deux fonctions, l'une dépendante des coordonnées de l'espace et l'autre exprimant la dépendance temporelle :

$$U(\vec{r},t) = U(\vec{r})e^{i\omega t} \tag{I-6}$$

où la fonction

$$U(\vec{r},t) = a(\vec{r},t).e^{i\varphi(\vec{r})} \tag{I-7}$$

est appelée *amplitude complexe*. La fonction d'onde réelle prend la forme suivante :

$$u(\vec{r},t)=\mathrm{Re}\left\{U(\vec{r})e^{i\omega t}\right\}=\frac{1}{2}\left\{U(\vec{r})e^{i\omega t}+U^{*}(\vec{r})e^{-i\omega t}\right\}. \quad \text{(I-8)}$$

1.3 Equation de Helmholtz

Si on remplace dans l'équation (I-5) l'amplitude complexe U exprimée par l'équation (I-6) on obtient l'équation d'Helmholtz qui s'écrit :

$$(\nabla^2+k^2)U(\vec{r})=0\,, \quad \text{(I-9)}$$

ou $k=\omega/c=2\pi/\lambda$ est le nombre d'onde. En fait, l'équation d'Helmholtz est la forme particulière de l'équation de propagation pour le cas particulier des ondes harmoniques.

1.4 Intensité optique

Pour rendre compte de la propagation d'énergie associée à une OEM monochromatique de champ électrique $\vec{E}=\vec{E}_0\exp\left[i(\omega t-\vec{k}\vec{r})\right]$, on introduit l'intensité I qui s'écrit dans le vide :

$$I=\varepsilon_0 c_0<\left|\vec{E}\right|^2>_t=\frac{\varepsilon_0 c_0}{2}E_0^2\,. \quad \text{(I-10)}$$

Afin d'alléger l'écriture des équations, les opticiens ont l'habitude de définir l'intensité optique sous la forme suivante

$$I=E_0^2=\left|U(\vec{r})\right|^2, \quad \text{(I-11)}$$

qui est une quantité bien évidemment pas homogène à des W/m^2. Tant que la propagation a lieu dans un même milieu alors on peut dire que l'intensité optique donnée par (I-11) correspond à l'intensité donnée par (I-10) à une constante près. Cependant la définition de l'intensité optique donnée par (I-11) ne convient pas pour décrire l'aspect énergétique d'une OEM à la frontière entre deux milieux matériels puisque la vitesse de phase de la lumière change ainsi que la permittivité diélectrique. Dans ce cas il faut utiliser la définition générale $I=\varepsilon.c<\left|\vec{E}\right|^2>_t$.

1.5 Front d'onde

Les fronts d'ondes sont les surfaces équiphases, soit $\varphi(\vec{r})$ =constante. Dans les cas les plus simples le front d'onde est plan ou sphérique. Si le front d'onde a une autre forme géométrique cela signifie que l'onde en question a subit une aberration dont la description dépasse le cadre de cet ouvrage.

1.6 Ondes élémentaires

Deux solutions simples à l'équation d'Helmholtz (I-9) sont l'onde plane et l'onde sphérique.

a) Onde plane :

L'onde plane est caractérisée par une amplitude complexe

$$U(\vec{r}) = A.e^{-i\vec{k}\vec{r}} = A.e^{-i[k_x x + k_y y + k_z z]}, \tag{I-12}$$

où le vecteur $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ représente le vecteur d'onde et A est une constante complexe appelée *enveloppe complexe*. La forme du front d'onde est obtenue en écrivant $\varphi(\vec{r})$ =constante, ce qui donne l'équation suivante

$$\vec{k}.\vec{r} = \text{constante} \tag{I-13}$$

qui correspond à l'équation d'un plan.

L'intensité de l'onde plane s'écrit $I(\vec{r}) = |A|^2$ et la puissance P transportée par l'onde est exprimée par l'intégrale suivante

$$P = \iint_{\substack{front \\ d'onde}} I d\Sigma, \tag{I-14}$$

qui est infinie car l'aire du front d'onde est infinie. Cela permet de tirer une première conclusion importante : l'onde plane n'est pas très réaliste quand on veut décrire des échanges énergétiques en terme de puissance. Une autre inconsistance de l'onde plane est que pour la générer il faut une source de dimension infinie. Cependant en optique on a l'habitude d'assimiler localement une onde complexe à une onde plane pour peu que sur une surface finie son amplitude soit sensiblement constante et que son front d'onde soit plan.

b) Onde sphérique :

L'onde sphérique est caractérisée par une amplitude complexe

$$U(\vec{r}) = \frac{A}{r} e^{-ikr}, \tag{I-15}$$

dont la forme du front d'onde est définie par l'équation suivante

$$k.r = \text{constante}, \tag{I-16}$$

et qui correspond à une sphère (r=constante).

Remarque : Il est important de ne pas confondre d'équation (I-16) avec l'équation (I-13).
L'intensité de l'onde sphérique s'écrit

$$I(\vec{r}) = \frac{|A|^2}{r^2} . \qquad \text{(I-17)}$$

Calculons la puissance transportée par l'onde sphérique, c'est à dire la puissance traversant une sphère de rayon R quelconque :

$$P = \iint\limits_{\substack{sphère \\ de\,rayon\,R}} \frac{|\mathrm{A}|^2}{R^2} d\Sigma = \frac{|\mathrm{A}|^2}{R^2} .S_{sphère} = \frac{|\mathrm{A}|^2}{R^2} \times (4\pi R^2) = 4\pi |\mathrm{A}|^2 . \qquad \text{(I-18)}$$

On constate que la puissance transportée par une onde sphérique donnée par (I-18) a une valeur finie. De plus la source à l'origine de cette onde est ponctuelle, donc de dimension réduite, et située en r=0. Ces deux propriétés remarquables font que l'onde sphérique, par rapport à l'onde plane, est assez réaliste du point de vue pratique.

c) Onde sphérique paraxiale :

La paraxialité d'une onde est un concept qui a été introduit au chapitre V traitant de l'optique géométrique et qui consiste en l'étude des systèmes optiques soumis à des rayons lumineux dits paraxiaux c'est à dire peut inclinés par rapport à l'axe optique du système. Dans ce paragraphe on va s'intéresser à la structure de l'onde sphérique précédente pour des points proches d'un axe préférentiel (axe z).
Nous allons commencer par exprimer dans l'amplitude complexe (I-15) la condition de paraxialité en écrivant que les points considérés sont peut éloignés de l'axe des z :
Cas général :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = z\sqrt{1+\theta^2} \text{ avec } \theta^2 = \frac{(x^2 + y^2)}{z^2} \qquad \text{(I-19)}$$

Condition de paraxialité $\rightarrow$ points peu éloignés de l'axe z $\rightarrow$ $\theta << 1$. Cela nous autorise de faire dans l'expression de r donnée par (I-19) un développement limité. L'ordre du développement ne sera pas le même dans le terme d'amplitude (1/r) et dans le terme de phase ($kr = 2\pi r / \lambda$). En effet la sensibilité du terme de phase aux variations de r est très importante en raison de la périodicité spatiale des termes cos(kr) et sin(kr) qui est précisément la longueur d'onde :

- Dans le terme d'amplitude on va confondre r avec z (développement à l'ordre zéro)
- Dans le terme de phase on va confondre r avec $r \approx z(1+\theta^2/2)$ (développement à l'ordre un appelé *Approximation de FRESNEL*).

Finalement, on obtient l'expression suivante de l'amplitude complexe de l'onde sphérique paraxiale :

$$U(\vec{r}) = \frac{A}{z} e^{-ikz} . e^{-ik\left(\frac{x^2+y^2}{2z}\right)} . \qquad \text{(I-20)}$$

Le second facteur de phase dans l'équation précédente rend compte de la courbure sphérique ($(x^2+y^2)/z$ =constante) du front d'onde. A très grande distance le terme exp(-ikz) devient prépondérant et le front d'onde devient plan. L'équation (I-20) peut être écrite sous la forme suivante :

$$U(\vec{r}) = A(\vec{r}) e^{-ikz} \qquad \text{(I-21)}$$

avec $$A(\vec{r}) = \frac{A}{z} . e^{-ik\left(\frac{x^2+y^2}{2z}\right)}$$

qui signifie que l'on s'intéresse à la propagation qui a lieu essentiellement autour de l'axe des z.

2- ONDES PARAXIALES

Au paragraphe précédent on a examiné la structure de l'amplitude complexe associée à une onde sphérique paraxiale en effectuant les développements limités nécessaires exprimant la condition de paraxialité dans l'expression de l'amplitude complexe d'une onde sphérique. Dans ce paragraphe on va examiner le cas général, c'est à dire que l'on va chercher quelle forme prend l'équation d'Helmholtz (I-9) pour une onde paraxiale quelconque.

Pour que l'onde paraxiale d'amplitude complexe $U(\vec{r}) = A(\vec{r}).e^{-ikz}$ vérifie l'équation d'Helmholtz, l'enveloppe $A(\vec{r})$ doit satisfaire une équation différentielle que l'on va établir dans ci-dessous.

A la figure (I-1) est représentée la variation sur l'axe (x=y=0) de la fonction d'onde réelle en fonction de z. Il apparaît une exigence nécessaire sur la « vitesse » de variation de $|A(r)|$ en fonction de z afin que la distance entre deux extremums consécutifs soit constante sinon il serait impossible de définir la longueur d'onde d'une onde initialement monochromatique. Il en résulte la nécessité de supposer que $A(\vec{r})$ varie lentement par rapport à z, ce qui signifie que si on considère un accroissement de la coordonnée longitudinale $\Delta z = \lambda$ alors la variation correspondante ΔA doit être très petite devant A :

$$\Delta A << A \,. \qquad \text{(I-22)}$$

Remarque : L'inégalité $\Delta A << A$ se rapporte séparément aux parties réelles et imaginaires.

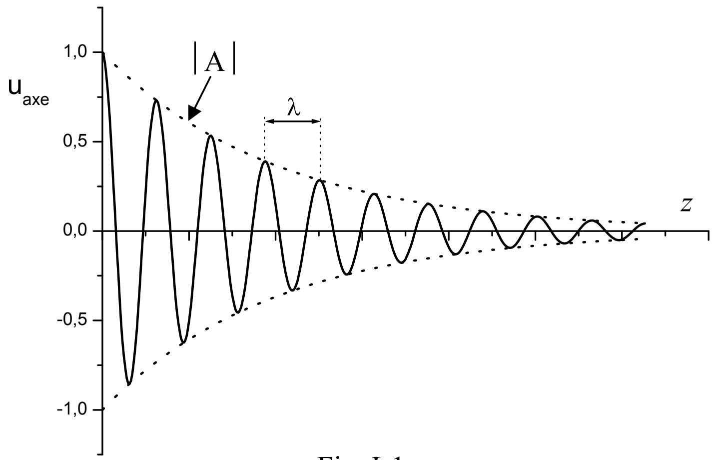

Fig. I-1

Au premier ordre, la variation de A s'écrit :

$$\Delta A \approx \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)\Delta z = \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right).\lambda \qquad \text{(I-23)}$$

Il en résulte que la condition (I-22) prend la forme suivante :

$$\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right) << \frac{A}{\lambda} \;\rightarrow\; \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right) << \frac{kA}{2\pi} \;\rightarrow\; \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right) << kA \qquad \text{(I-24)}$$

De manière similaire, on doit supposer que la dérivée $\partial A / \partial z$ varie peu sur une distance λ et par conséquent :

$$\Delta\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right) << \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right).\Delta z = \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}\lambda$$

$$\rightarrow \quad \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} << k^2 A \qquad \text{(I-25)}$$

<u>Remarque</u> : L'équation (I-25) exprime mathématiquement ce qu'on entend par *Approximation de l'enveloppe lentement variable* symbolisée dans la littérature par l'acronyme SVEA (Slowly Varying Enveloppe Approximation) aussi appelée *Approximation paraxiale*.
Si l'on injecte l'amplitude complexe associée à l'onde paraxiale (Eq. I-21) dans l'équation d' Helmholtz (Eq. I-9) et que l'on tienne compte de l'équation (I-25) alors l'équation d' Helmholtz prend la forme suivante

$$\nabla_{\perp}^2(A) - 2ik\frac{\partial A}{\partial z} = 0 \qquad \text{(I-26)}$$

L'équation précédente porte le nom d'*Equation de propagation paraxiale*, où $\nabla_{\perp}^2$ désigne l'opérateur laplacien transverse ($\nabla_{\perp}^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$). C'est une équation différentielle qui ressemble à l'équation de Schrödinger de la mécanique quantique.

3- LE FAISCEAU GAUSSIEN

On peut mathématiquement générer toute sorte de fonction satisfaisant l'équation de propagation paraxiale (Eq. I-26). Du point de vue pratique, il est important que l'enveloppe $A(\vec{r})$ comporte un terme limitant radialement l'intensité afin d'obtenir un faisceau. Ce dernier peut être vu comme un cylindre ou un cône de lumière. Au laboratoire, il est courant d'utiliser comme source lumineuse un LASER qui par essence émet un faisceau plus ou moins divergent dont l'étendue radiale est finie et non infinie comme l'onde plane. On va donc chercher une solution à l'Eq. (I-26) qui doit avoir les caractéristiques suivantes :

- un front d'onde sphérique comme une onde sphérique
- une décroissance latérale de l'intensité lumineuse

La solution d'essai pour l'enveloppe complexe peut prendre la forme suivante :

$$A(\vec{r}) = A(\rho, z) = E_0 \exp\left[-i\left(p(z) + \frac{k\rho^2}{2q(z)}\right)\right], \qquad \text{(I-27)}$$

où $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ est la coordonnée radiale. Les paramètres $p(z)$ et $q(z)$ sont complexes :