Chapitre 1

GÉNÉRALITÉS. RÉSULTATS DE BASE

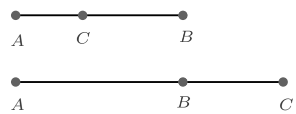
1.1 Notations

On se place dans le plan affine euclidien orienté $\mathcal{E}_2$, d'espace de vecteurs associé $\overrightarrow{E}_2$. Tout au long de ce livre nous utilisons des notations classiques en géométrie, les principales sont les suivantes :

- $\overline{AB}$ longueur algébrique entre A et B ; $\overline{AB}$ vaudra AB ou $-AB$ selon l'ordre dans lequel A et B apparaissent sur la droite (AB).
- $[AB]$ segment d'extrémités A et B
- $[AB)$ demi-droite d'origine A et passant par B (avec $B \neq A$)
- (AB) droite passant par les deux points distincts A et B
- $\overrightarrow{AB}$ vecteur d'origine A et d'extrémité B
- $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ angle orienté, appartenant à $[0, 2\pi[$
- $\vec{u} \wedge \vec{v}$ produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$
- $\vec{u} \cdot \vec{v}$ produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$
- $(d_1) \mathbin{/\!\!/} (d_2)$ les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles
- $(d_1) \perp (d_2)$ les droites (d_1) et (d_2) sont perpendiculaires
- $[A_1A_2 \cdots A_n]$ aire du polygone $A_1A_2 \cdots A_n$
- $[ABC]$ ou $[\triangle ABC]$ aire du triangle ABC. Le triangle ABC se note aussi $\triangle ABC$.
- $\mathcal{P}(A_1A_2 \cdots A_n)$ périmètre du polygone $A_1A_2 \cdots A_n$
- $\widehat{AB}$ arc de cercle entre A et B
- $p(X, \omega)$ puissance du point X par rapport au cercle ω
- $ABC \cong DEF$ les triangles ABC et DEF sont isométriques (dans cet ordre de sommets)
- $ABC \sim DEF$ les triangles ABC et DEF sont semblables (dans cet ordre de sommets)
- a, b, c les longueurs des côtés $[BC], [CA], [AB]$ du triangle ABC
- $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ les angles $\widehat{CAB}, \widehat{ABC}, \widehat{BCA}$ du triangle ABC
- R, r les rayons des cercles circonscrit et inscrit du triangle ABC
- s le semi-périmètre (ou demi-périmètre) $s = \dfrac{a+b+c}{2}$
- x, y, z les expressions $\dfrac{b+c-a}{2}, \dfrac{c+a-b}{2}, \dfrac{a+b-c}{2}$
- h_a, h_b, h_c les hauteurs du triangle ABC
- m_a, m_b, m_c les médianes du triangle ABC

- ✍ l_a, l_b, l_c les bissectrices du triangle ABC
- ✍ r_a, r_b, r_c les rayons des cercles ex-inscrits du triangle ABC
- ✍ $\overline{z}$ conjugué du nombre complexe z
- ✍ $|z|$ module du nombre complexe z
- ✍ $\arg(z)$ argument d'un nombre complexe z
- ✍ Triangle acutangle : un triangle dont les 3 angles intérieurs sont aigus

En géométrie classique, la plupart des quantités ne sont pas orientées, cela veut dire que si on les mesure dans le sens opposé, alors on obtient la même valeur : $AB = BA$, $\widehat{ABC} = \widehat{CBA}$ et $[ABC] = [CBA]$. Généralement, c'est une façon raisonnable de faire les choses, malheureusement des fois il y a quelques inconvénients. Par exemple, si A, B et C sont des points alignés, et $AB = 5$, $BC = 3$, quelle est la valeur de AC ? cela peut être 2 ou 8 selon la façon avec laquelle ils sont placés sur la droite. Le même problème se pose lorsqu'on additionne des angles ou des aires.



Normalement, ces situations ne sont pas importantes, car il est clair d'après le dessin qui est correct. Cependant, des fois il y a plusieurs façons pour dessiner le diagramme, ce qui donne lieu à une preuve avec plusieurs cas différents. Une autre façon d'approcher le problème est d'« affecter » un signe aux quantités selon une direction. On introduit la notion de *mesure algébrique* d'un segment. Une mesure algébrique est une longueur affectée d'un signe, ce qui permet d'en orienter le sens sur un axe donné. Ainsi, alors que la longueur d'un segment est toujours positive, on peut utiliser une mesure algébrique de ce segment, qui est égale à sa longueur si on la prend dans un sens, et à l'opposé de sa longueur si on la prend dans l'autre. La notation qui différencie une mesure algébrique relative à un segment de la longueur de celui-ci consiste à placer une barre horizontale au-dessus des lettres qui représentent les deux points du segment. Alors que l'ordre des lettres n'a pas d'importance dans la notation d'une longueur, il définit justement le signe de la mesure algébrique, puisque la première lettre désigne le point de départ et la seconde désigne le point d'arrivée. Exemple : la mesure algébrique d'un segment $[AB]$ (ou $[BA]$, ce qui est équivalent) peut être $\overline{AB}$ ou $\overline{BA}$. Si l'on suppose que l'axe est orienté de A vers B, alors $\overline{AB} = AB$ et $\overline{BA} = -AB$. Si l'on suppose au contraire que l'axe est orienté de B vers A, alors $\overline{AB} = -AB$ et $\overline{BA} = AB$. Le produit des mesures algébriques de deux segments portés par une même droite ne dépend pas de l'orientation de celle-ci, et peut donc être introduit directement en géométrie euclidienne (voir puissance d'un point par rapport à un cercle). En ce qui concerne le quotient, il ne dépend pas non plus de l'unité de longueur choisie : en fait le quotient des mesures algébriques de deux segments portés par une même droite est une notion de géométrie affine. Par exemple, $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ vaudra $-\dfrac{AB}{AC}$ si A est entre B et C car AB et AC sont dirigés dans des sens différents. Par contre, il vaudra $+\dfrac{AB}{AC}$ si B est entre A et C car alors les deux seront dirigés dans le même sens.

Si on vous dit que $AB = 5$, $BC = 3$ et C est en dehors de $[AB]$, alors vous êtes sûrs que $AC = AB + BC = 8$, ceci est parce que les deux ont le même signe, et donc sont dans la même direction. Si C est entre A et B, alors $AB = 5$, $BC = -3$ et donc $AC = AB + BC = 2$. Le résultat pourrait être aussi $\overline{AB} = -5$, $BC = 3$. En tout cas, ce qui compte c'est qu'importe l'ordre des points A, B et C sur la droite, l'équation $AC = AB + BC$ est toujours vraie.

Si le plan est orienté, un même angle peut être déclaré aussi bien positif que négatif, selon le sens dans lequel on « tourne » du premier vecteur au second. Par convention, on oriente le plan dans le sens dit « trigonométrique », c'est-à-dire dans le sens contraire des aiguilles d'une montre (ou « sens anti-horaire »).

Si l'on considère deux demi-droites ou vecteurs, alors l'ordre dans lequel on cite les demi-droites ou les vecteurs définit le sens de l'angle, donc son signe.

Définition 1.1 Angles orientés
Pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\vec{E}_2$, on note $(\vec{u}, \vec{v})$ l'**angle orienté** défini par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. □

Soient O, M et N trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$, et soit $\mathcal{C}(O, 1)$ le cercle unité. On suppose que $[OM)$ (resp. $[ON)$) coupe $\mathcal{C}$ en A (resp. B). On obtient une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ en calculant la longueur parcourue sur le cercle pour aller de A à B et en lui donnant un signe représentant le sens de parcours. Si la mesure en radians de $\widehat{AOB}$ est α, les mesures de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ sont de la forme $\alpha + 2k\pi$ ou $-\alpha + 2k\pi$ selon le sens de parcours pour aller de A à B, k étant un entier relatif. Parmi toutes les mesures d'un angle orienté, une seule se trouve dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$, elle est appelée mesure principale de l'angle orienté. Si α est la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, alors $|\alpha|$ est la mesure en radian de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$.

- ☞ Si A, B, C sont 3 points tels que $A \neq B$ et $A \neq C$, la mesure de l'**angle géométrique** $\widehat{BAC}$ est l'unique réel de $[0, \pi]$ tel que $\cos \widehat{BAC} = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
- ☞ Relation de Chasles : $\widehat{AMC} = \widehat{AMB} + \widehat{BMC}$.
- ☞ $\widehat{AXY} = \widehat{AXZ}$ si, et seulement si X, Y et Z sont alignés.
- ☞ $\widehat{XYZ} = 0°$ si, et seulement si X, Y et Z sont alignés.
- ☞ $\widehat{ABC} + \widehat{BCA} + \widehat{CAB} = 0$.
- ☞ $\widehat{PQS} = \widehat{PRS}$ si, et seulement si P, Q, R et S sont cocycliques.

Définition 1.2 Angles de vecteurs
Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs non nuls. Soit E le point tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CD}$, i.e., $ACDE$ est un parallélogramme. On note $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ l'angle orienté $\widehat{BAE}$, et on dira que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ est un angle de vecteurs. Les angles de vecteurs ont un signe et sont définis modulo 2π. On a : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = -(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB})$. □

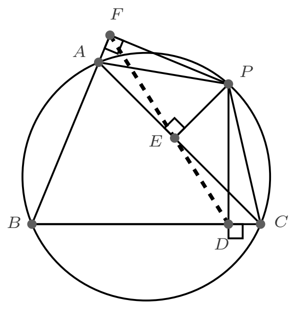
Définition 1.3 Angles de droites
Soient (AB) et (CD) deux droites. Les angles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}), (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}), (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC})$ et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DC})$ sont tous égaux si on les considère modulo π. On note (AB, CD) ces angles qui sont bien définis modulo π.
Les angles de droites ont un signe et on a : $(AB, CD) = -(CD, AB)$. □

Exemple 1.1 Trois cercles $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ se coupent en un point commun O. Les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se coupent à nouveau au point X ; les cercles $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ se coupent à nouveau au point Y ; et finalement les cercles $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_1$ se coupent à nouveau au point Z. Soit A un point de $\mathcal{C}_1$ qui n'appartient pas à $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$. La droite (AX) coupe $\mathcal{C}_2$ à nouveau au point B, et (BY) coupe $\mathcal{C}_3$ à nouveau au point C.
Montrer que les points A, Z et C sont alignés. □

On va résoudre le problème en utilisant les angles orientés. On a successivement :

$$\begin{aligned}
\widehat{AZC} &= \widehat{AZO} + \widehat{OZC} = \widehat{AXO} + \widehat{OYC} \qquad \text{(points cocycliques)} \\
&= \widehat{BXO} + \widehat{OYB} \qquad \text{(points alignés)} \\
&= \widehat{BXO} + \widehat{OXB} \qquad \text{(points cocycliques)} \\
&= \widehat{BXO} - \widehat{BXO} \qquad \text{(angles orientés)} \qquad = 0 \quad \text{donc les points } A, Z \text{ et } C \text{ sont alignés.}
\end{aligned}$$

Exemple 1.2 Droite de Simson
Soient ABC un triangle, et P un point dans le plan du triangle. On désigne par D, E et F les pieds des perpendiculaires issues de P aux côtés BC, CA et AB respectivement. Montrer que les points D, E et F sont alignés si, et seulement si, P appartient au cercle circonscrit au triangle ABC. □



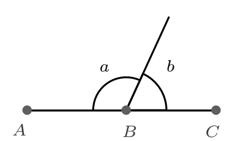
PCD est un triangle rectangle en D, donc $[PC]$ est un diamètre du cercle passant par P, C et D. De même, PEC est un triangle rectangle en E, donc $[PC]$ est un diamètre du cercle passant par P, C et E. Par suite les points P, C, D et E sont cocycliques. On montre de même que les points P, A, F et E sont cocycliques. Par conséquent :

$$\widehat{DEF} = \widehat{DEP} + \widehat{PEF} = \widehat{DCP} + \widehat{PAF} = \widehat{BCP} - \widehat{BAP}.$$

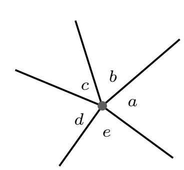
Donc $\widehat{DEF} = 0° \iff \widehat{BCP} = \widehat{BAP}$. Le membre de gauche de cette équivalence est une condition pour que D, E et F soient alignés, et le membre de droite de l'équivalence est une condition pour que P appartienne au cercle circonscrit au triangle ABC.

1.2 Angles

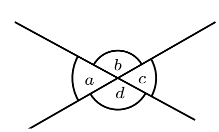
- ❑ Si A, B et C sont trois points alignés, alors $a + b = 180°$.
- ❑ Si $a + b = 180°$, alors les points A, B et C sont alignés.



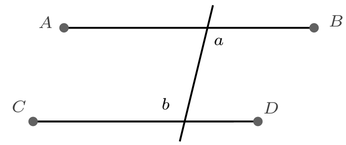
- ❑ Si n'importe quel nombre d'angles sont « situés » autour d'un point, alors leur somme est égale à 360°. Par exemple, dans le dessin ci-contre on a : $a + b + c + d + e = 360°$.



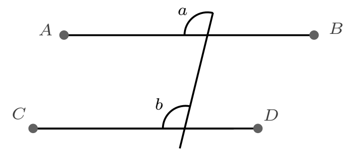
- ❑ Angles opposés par le sommet :
  si deux droites se coupent, alors $a = c$ et $b = d$.



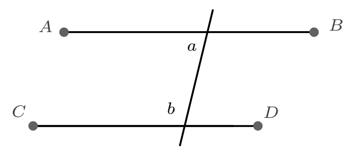
- ❑ Angles alternes internes :
  les droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, $a = b$.



- ❑ Angles correspondants :
  les droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, $a = b$.

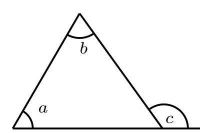


- ❑ Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si : $a + b = 180°$.



- ❑ Somme des angles d'un polygone : la somme des angles d'un polygone à n côtés est égale à $(n-2) \cdot 180°$. Par exemple, la somme des angles d'un triangle est égale à $(3-2) \cdot 180° = 180°$. La somme des angles d'un quadrilatère est égale à $(4-2) \cdot 180° = 360°$.

- ❑ La mesure de l'angle externe d'un triangle est égale à la somme des mesures des angles internes opposés : $c = a + b$.



- ❑ Dans un triangle ABC on a : $AB = AC$ si, et seulement si, $\widehat{B} = \widehat{C}$.

1.3 Triangles isométriques

Définition 1.4 Deux triangles ABC et MNP sont isométriques si leurs côtés sont deux à deux de même longueur :

$$AB = MN, \qquad AC = MP, \qquad \text{et} \qquad BC = NP.$$

- ☞ On respecte l'ordre des lettres : A et M, B et N, C et P.
- ☞ Soient ABC un triangle isocèle en A, et H le milieu de $[BC]$, alors les triangles ABH et ACH sont isométriques. En effet : (i) $AB = AC$ car le triangle est isocèle en A. (ii) $BH = CH$ car H est le milieu de $[BC]$. (iii) $[AH]$ est un côté commun aux deux triangles.

Théorème 1.1 *Deux triangles sont isométriques si, et seulement si, l'un est l'image de l'autre par une translation, une symétrie axiale, une rotation ou une succession de telles transformations.* □

✍ Si deux triangles ABC et MNP sont isométriques alors leurs angles sont égaux :

$$\widehat{A} = \widehat{M}, \qquad \widehat{B} = \widehat{N} \qquad \text{et} \qquad \widehat{C} = \widehat{P}.$$

✍ Si deux triangles ABC et MNP sont isométriques alors ils ont la même aire.

✍ Des triangles ayant des angles égaux ne sont pas forcément isométriques. De même, des triangles ayant la même aire ne sont pas forcément isométriques.

✍ On dispose d'autres critères pour montrer que deux triangles sont isométriques sans montrer les trois égalités des côtés.

Théorème 1.2 **Critère CAC** *(côté-angle-côté)*
Si deux triangles ABC et MNP ont un même angle compris entre deux côtés respectivement égaux, alors ils sont isométriques : $AB = MN, \qquad AC = MP \qquad$ *et* $\qquad \widehat{A} = \widehat{M}.$ □

Théorème 1.3 **Critère ACA** *(angle-côté-angle)*
Si deux triangles ABC et MNP ont un côté de même longueur compris entre deux angles respectivement égaux, alors ils sont isométriques : $AB = MN, \qquad \widehat{A} = \widehat{M} \qquad$ *et* $\qquad \widehat{B} = \widehat{N}.$ □

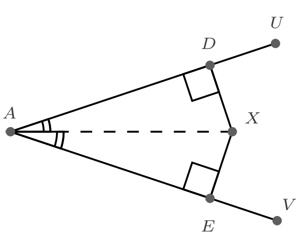
✍ Si les triangles ABC et MNP ont un angle droit respectivement aux points C et P, et si $AC = MP$ et $AB = MN$, alors ils sont isométriques. C'est une simple conséquence du théorème de Pythagore puisqu'alors $BC = NP$ et les 3 côtés des deux triangles sont deux à deux égaux.

Proposition 1.1 Soient A et B deux points distincts dans le plan. L'ensemble des points X tels que $XA = XB$ est précisément la médiatrice du segment $[AB]$. □

Soit M le milieu du segment $[AB]$ et (d) sa médiatrice . Si $X \in (d)$, alors les triangles rectangles AMX et BMX sont isométriques (car $\widehat{AMX} = \widehat{BMX} = 90°$, $AM = BM$ et XM est un côté commun), par suite $AX = BX$.
Maintenant, si $AX = BX$, alors soit N le pied de la perpendiculaire issue de X à la droite (AB), les triangles ANX et BNX sont isométriques, et par suite $AN = NB$, ce qui implique que $X \in (d)$.

Proposition 1.2 Les demi-droites $[AU)$ et $[AV)$ forment un angle. L'ensemble des points X situés à l'intérieur de l'angle $\widehat{UAV}$ et qui sont à égale distance de AU et AV, est précisément la bissectrice de $\widehat{UAV}$. □

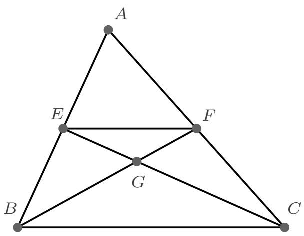
Soient D et E les projections orthogonales de X sur (AU) et (AV) respectivement. Soit (d) la bissectrice de l'angle $\widehat{UAV}$. Si $X \in (d)$ alors les triangles ADX et AEX sont isométriques (critère ACA), d'où $XD = XE$.



Réciproquement, si $XD = XE$, alors les triangles ADX et AEX sont isométriques, par suite $\widehat{XAD} = \widehat{XAE}$, et par conséquent $X \in (d)$.

Proposition 1.3 Soient ABC un triangle et E, F les milieux des segments $[AB], [AC]$ respectivement. Soit G le point d'intersection de (BF) et (CE), alors on a :

$$BG = 2GF \qquad \text{et} \qquad CG = 2GE.$$



Remarquons tout d'abord que les triangles AEF et ABC sont semblables (critère CAC). D'après le théorème des milieux (ou bien puisque le coefficient de similitude est 2) $EF = \frac{1}{2}BC$, de plus on a $\widehat{FEA} = \widehat{CBA}$, donc $(EF) \parallel (BC)$. Ainsi, $\widehat{BCE} = \widehat{CEF}$ et donc les triangles BCG et FEG sont semblables (deux angles égaux). Puisque $EF = \frac{1}{2}BC$, le coefficient de similitude est $\frac{1}{2}$ et on obtient alors les égalités $BG = 2GF$ et $CG = 2GE$.

1.4 Triangles : côtés et angles

- **Théorème de Pythagore** : le triangle ABC est rectangle en A si, et seulement si

$$AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

- **Loi des sinus** : dans un triangle ABC on a

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

avec $c = AB$, $b = AC$, $a = BC$ et R est le rayon du cercle circonscrit.

- **Loi des cosinus (ou relation d'Al-Kashi)** : dans un triangle ABC on a

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A.$$

De même on a aussi : $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B$ et $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$.

- **Loi des tangentes** : dans un triangle ABC on a

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan \frac{A-B}{2}}{\tan \frac{A+B}{2}}$$

avec $a = BC$ et $b = CA$.

Une autre formulation équivalente de la loi des tangentes est :

$$\tan \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \operatorname{cotan} \frac{A}{2}.$$

Exemple 1.3 Peter Woo
Au Lycée, une enseignante que j'admirais beaucoup nous a montré que pour déterminer la mesure des autres angles d'un triangle, étant données la longueur de deux côtés et la mesure de l'angle compris entre eux, on détermine d'abord la longueur du troisième côté en utilisant la loi des cosinus (relation d'Al-Kashi), puis on détermine la mesure des autres angles en utilisant la loi des sinus. Beaucoup plus tard, j'ai découvert une façon plus facile qui évite l'utilisation de la loi des cosinus et les racines carrées.
Pouvez-vous découvrir une telle méthode ? □

En appliquant la loi des tangentes $\tan\dfrac{B-C}{2}=\dfrac{b-c}{b+c}\operatorname{cotan}\dfrac{A}{2}$, on trouve $\dfrac{B-C}{2}$. Ensuite, en additionnant et en soustrayant $\dfrac{B-C}{2}$ et $\dfrac{B+C}{2}=90°-\dfrac{A}{2}$, on détermine $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.

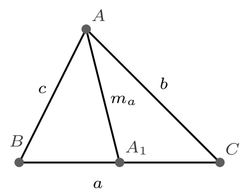
- **Loi des cotangentes** : dans un triangle ABC on a

$$\operatorname{cotan} A = \frac{b^2+c^2-a^2}{4\,[ABC]},$$

où $[ABC]$ est l'aire du triangle ABC.

- **Théorème de la médiane** :
si m_a est la longueur de la médiane AA_1 issue du sommet A, alors on a :

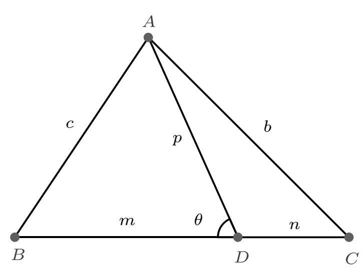
$$2\left(b^2+c^2\right) = a^2+4m_a^2.$$



Théorème 1.4 Théorème de Stewart (1746)
Soient ABC un triangle, et D un point de $[BC]$. On pose $p=AD$, $m=BD$ et $n=CD$. Alors on a :

$$a(p^2+mn) = b^2m+c^2n.$$

La relation d'Al-Kashi appliquée dans le triangle ABD donne : $c^2 = m^2+p^2-2mp\cos\theta$ et $c^2n = m^2n+p^2n-2mnp\cos\theta$. De même, la relation d'Al-Kashi appliquée dans le triangle ACD, et puisque $\cos(180°-\theta)-\cos\theta$, on obtient : $b^2 = n^2+p^2+2np\cos\theta$ et $b^2m = n^2m+p^2m+2mnp\cos\theta$.



La somme des deux identités donne : $b^2m+c^2n = m^2n+n^2m+p^2n+p^2m = (m+n)(p^2+mn) = a(p^2+mn)$. Dans le cas spécial où (AD) est une médiane, alors on trouve $4p^2+a^2=2(b^2+c^2)$, c'est le théorème de la médiane.