

Table des matières

1	SUITES	5
1.1	Définitions. Convergence	5
1.2	Suites récurrentes	17
1.2.1	Suites récurrentes du premier ordre	17
1.2.2	Suites récurrentes du second ordre	18
1.3	Suites et arithmétique	29
1.3.1	Suites arithmétiques et géométriques	29
1.3.2	Suites de Fibonacci et de Lucas	32
1.3.3	Suites d'entiers	38
1.3.4	Suite complète	51
1.3.5	Puissances de 2	54
1.4	Exercices	58
2	ÉQUATIONS FONCTIONNELLES	83
2.1	Équations de Cauchy	83
2.2	Équations généralisées de Cauchy	87
2.2.1	Équations de Pexider	88
2.2.2	Équations de Vincze	90
2.2.3	Fonctions préservant les valeurs moyennes	91
2.3	Se ramener aux équations de Cauchy	94
2.4	Changement de variables	101
2.5	Symétrie et variables additionnelles	108
2.6	Itérations et relations de récurrence	111
2.7	Construction explicite de fonctions	118
2.8	Équations fonctionnelles et arithmétique	124
2.9	Équations fonctionnelles et bases de numération	134

2.10	Équations fonctionnelles et géométrie	137
2.11	Approximation par des fonctions linéaires	139
2.12	Utilisation de l'inf et du sup	142
2.13	Points fixes	149
2.14	Équations fonctionnelles pour les polynômes	152
2.15	Inégalités avec les équations fonctionnelles	155
2.16	Raisonnement par récurrence	160
2.17	Utilisation de la continuité	166
2.18	Utilisation des groupes	168
2.19	Utilisation de la densité	171
2.20	Utilisation de la surjectivité	174
2.21	Exercices	179
2.21.1	Équations fonctionnelles sur \mathbb{N} ou \mathbb{Z}	179
2.21.2	Équations fonctionnelles sur \mathbb{Q}	207
2.21.3	Équations fonctionnelles sur \mathbb{R}	221
3	INÉGALITÉS ALGÈBRIQUES	251
3.1	Rappels sur les nombres réels	251
3.2	Fonction quadratique $ax^2 + 2bx + c$	254
3.3	Inégalité $x^2 \geq 0$	255
3.4	Inégalité de la moyenne	263
3.5	Inégalité de réordonnement	270
3.6	Inégalités et convexité	279
3.7	Utiliser les extrémités	291
3.8	Inégalités pour les fonctions symétriques	294
3.9	Quelques méthodes pour résoudre les inégalités	298
3.9.1	Raisonnement par récurrence	298
3.9.2	Utiliser les inégalités de base	300
3.9.3	Utilisation de la dérivée	307
3.9.4	Substitutions	310
3.9.5	Substitutions trigonométriques	314
3.9.6	Propriétés des polynômes de degré 2	317
3.9.7	Transformation de Ravi	319
3.9.8	Technique de majoration	320
3.9.9	Théorème de Muirhead	323
3.9.10	Homogénéisation	331
3.9.11	Normalisation	334
3.9.12	Théorème de Stolarsky	335

3.9.13	Inégalités strictes	337
3.9.14	Multiplicateurs de Lagrange	339
3.9.15	Une identité algébrique	342
3.9.16	Lemme T2	345
3.9.17	Généralisation de quelques inégalités classiques	360
3.9.18	Identité de Lagrange	364
3.9.19	Inégalités avec max et min	368
3.9.20	Prendre le carré!	371
3.9.21	Sommation par parties	375
3.9.22	Inégalités avec une condition du type produit	378
3.9.23	Inégalités avec une condition du type somme	381
3.9.24	Inégalités avec des conditions complexes	383
3.9.25	Imposer des conditions sur les variables!	388
3.9.26	Développer et réduire	389
3.9.27	Une autre identité algébrique	391
3.9.28	Inégalité de Klamkin	395
3.9.29	Inégalité d'Oppenheim	398
3.9.30	Inégalité de Kantorovich	401
3.9.31	Inégalité de Steffensen	403
3.9.32	Utilisation des fonctions affines	406
3.9.33	Utilisation de la tangente	409
3.9.34	Utiliser les inégalités géométriques	413
3.9.35	Inégalité de Radon	417
3.9.36	Utilisation des intégrales	420
3.9.37	Comparaison d'intégrales	423
3.9.38	La méthode (u, v)	427
3.9.39	Utilisation des déterminants	430
3.9.40	Inégalité de Surányi	432
3.9.41	Utilisation des séries entières	436
3.10	Exercices	439
4	INÉGALITÉS GÉOMÉTRIQUES	467
4.1	Inégalité triangulaire	467
4.2	Identités dans le triangle. Applications	472
4.2.1	Identités dans le triangle	472
4.2.2	Applications : inégalités classiques	483
4.3	Inégalités avec les côtés d'un triangle	489
4.4	Étude des triangles. Utilisation des inégalités	497

4.5	Inégalités géométriques et triangles spéciaux	501
4.5.1	Triangle de côtés \sqrt{a} , \sqrt{b} et \sqrt{c}	501
4.5.2	Triangle de côtés m_a , m_b et m_c	508
4.5.3	Triangle de côtés a , b et $2m_c$	510
4.5.4	Triangle d'angles $\pi - 2\alpha$, $\pi - 2\beta$ et $\pi - 2\gamma$	513
4.5.5	Triangle de sommets O , I et H	518
4.6	Étude des triangles. Éléments remarquables	523
4.7	Convexité et trigonométrie	526
4.8	Inégalité d'Euler et applications	534
4.9	Fonctions symétriques de a , b et c	541
4.10	Quelques inégalités géométriques dans le triangle	545
4.11	Aire et périmètre	567
4.12	Un triangle à l'intérieur d'un autre triangle	577
4.13	Un point à l'intérieur d'un triangle	579
4.14	Inégalités géométriques classiques	596
4.15	Théorème d'Erdős-Mordell	604
4.15.1	Théorème d'Erdős-Mordell pour un triangle	604
4.15.2	Théorème d'Erdős-Mordell pour un point extérieur	609
4.15.3	Inégalité d'Erdős-Mordell pour un polygone convexe	611
4.15.4	Généralisation du théorème d'Erdős-Mordell	613
4.16	Exercices	627
	Bibliographie	641
	Index	643