

Table des matières

1 THÉORIE DES NOMBRES	5
1.1 Divisibilité	5
1.2 Nombres premiers	10
1.3 PGCD et PPCM	19
1.3.1 pgcd	19
1.3.2 ppcm	20
1.4 Pair et impair	30
1.5 Congruence	33
1.6 Théorème des restes chinois	46
1.7 Système de numération	52
1.8 Puissances d'entiers	57
1.9 Partie entière. Partie fractionnaire	72
1.9.1 Partie entière et points à coordonnées entières	81
1.9.2 Quelques identités du type Ramanujan	86
1.10 Fonctions multiplicatives	88
1.11 Fonction indicatrice d'Euler	91
1.12 Formule de Legendre	96
1.13 Théorèmes de Fermat, Euler et Wilson	100
1.13.1 Théorème de Fermat	100
1.13.2 Théorème d'Euler	108
1.13.3 Théorème de Wilson	117
1.14 Racines primitives modulo les premiers	120
1.15 Nombres premiers en progression arithmétique	123
1.16 Étude des fonctions $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$	127
1.17 Lemme de Mihai Manea (ou lemme LTE)	132

1.18	Théorème de Zsigmondy	139
1.19	Résidus quadratiques. Symbole de Legendre	142
1.20	Nombres de Fermat	154
1.21	Nombres de Mersenne	157
1.22	Nombres parfaits. Nombres triangulaires	158
1.23	Coefficients binomiaux	162
1.24	Théorème de Lucas	164
1.25	Développement additif	167
1.26	Quelques méthodes en théorie des nombres	172
1.26.1	Plus grand et plus petit élément	172
1.26.2	Principe des tiroirs	175
1.26.3	Raisonnement par récurrence	177
1.26.4	Principe d'inclusion-exclusion	183
1.26.5	« Vieta Jumping »	186
1.26.6	Polynômes cyclotomiques	190
1.27	Exercices	193
2	ÉQUATIONS DIOPHANTIENNES	227
2.1	Méthode de décomposition	227
2.2	Utilisation des inégalités	230
2.3	Méthode de la représentation paramétrique	235
2.4	Utilisation de la congruence	237
2.5	Raisonnement par récurrence	242
2.6	Méthode de descente infinie	246
2.7	Méthodes et techniques diverses	249
2.8	Équations diophantiennes sans solutions entières	253
2.9	Équations diophantiennes avec une infinité de solutions	256
2.10	Équations diophantiennes linéaires	258
2.11	Équations diophantiennes quadratiques	261
2.11.1	Équation de Pythagore	261
2.11.2	Équations de Pell	265
2.11.3	Autres équations diophantiennes quadratiques	274
2.12	Diverses équations diophantiennes	279
2.12.1	Équations cubiques	279
2.12.2	Équations diophantiennes polynômiales de degré ≥ 4	281
2.12.3	Équations diophantiennes exponentielles	284
2.13	Diviseurs premiers de la forme $4m + 3$	289
2.14	Équations diophantiennes du type Euler	291

2.15	Méthodes avancées de résolution	294
2.15.1	L'anneau $\mathbb{Z}[i]$ des entiers de Gauss	297
2.15.2	L'anneau des entiers de $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$	301
2.15.3	Diviseurs de $a^2 + b^2$ avec a et b des entiers	305
2.15.4	Diviseurs de $a^2 + 2b^2$ avec a et b des entiers	307
2.15.5	Diviseurs de $a^2 - 2b^2$ avec a et b des entiers	308
2.16	Exercices	309
3	COMBINATOIRE	321
3.1	Principes de bases et formules de dénombrement	321
3.1.1	Deux principes basiques de dénombrement	321
3.1.2	Permutation et combinaison sans répétition	322
3.1.3	Permutation circulaire d'éléments distincts	323
3.1.4	Quelques identités combinatoires	324
3.1.5	Nombre de solutions d'une équation de premier degré	330
3.1.6	Raisonnement par récurrence	332
3.1.7	Suite de Fibonacci et nombres de Catalan	338
3.1.8	Principe d'inclusion-exclusion	340
3.1.9	Exercices	345
3.2	Suites récurrentes	349
3.2.1	Équation caractéristique	350
3.2.2	Méthode de substitution	352
3.3	Principe des tiroirs et principe de la valeur moyenne	356
3.3.1	Principe des tiroirs	356
3.3.2	Principe de la valeur moyenne	366
3.4	Invariants	368
3.4.1	Définition et premiers exemples	368
3.4.2	Coloriage	372
3.4.3	Théorie des jeux	374
3.5	Fonctions	376
3.5.1	Les fonctions en combinatoire	376
3.5.2	Compter de deux façons !	382
3.5.3	Mettre en paire	390
3.6	Fonctions génératrices	394
3.7	Classification et méthode des étapes fractionnaires	399
3.7.1	Classification	399
3.7.2	Méthode des étapes fractionnaires	402
3.7.3	Exercices	404

3.8	Relations de récurrence	408
3.9	Méthode d'évaluation	420
3.10	Raisonnement par l'absurde. Principe extrême	423
3.10.1	Raisonnement par l'absurde	423
3.10.2	Principe extrême	428
3.11	Méthode d'ajustement local	430
3.11.1	Exercices	434
3.12	Méthodes constructives	437
3.12.1	Exercices	442
3.13	Problèmes d'existence. Inégalités en combinatoire	446
3.14	Maximum et minimum en combinatoire	453
3.14.1	Exercices	459
3.15	Racines de l'unité	463
3.16	Exercices	467
4	THÉORIE DES GRAPHERS	505
4.1	Définition d'un graphe	505
4.2	Degré d'un sommet	512
4.3	Théorème de Turán	519
4.4	Arbres	527
4.5	Problème d'Euler	532
4.6	Problème d'Hamilton	535
4.7	Graphes planaires	543
4.8	Théorie de Ramsey	552
4.9	Couplages	570
4.10	Exercices	572
5	POLYNÔMES	579
5.1	Définitions. Généralités	579
5.2	Polynômes et arithmétique	586
5.3	Racines et coefficients. Formules de Viète	591
5.4	Dérivée d'un polynôme	600
5.5	Polynômes irréductibles	602
5.6	Polynômes d'interpolation de Lagrange	607
5.7	Exercices	612
	Bibliographie	639
	Index	641