

# Table des matières

|  |          |
|--|----------|
| <b>1 THÉORIE DES NOMBRES</b>   | <b>5</b> |
| 1.1 Divisibilité . . . . .   | 5        |
| 1.2 Nombres premiers . . . . .   | 10       |
| 1.3 PGCD et PPCM . . . . .   | 19       |
| 1.3.1 pgcd . . . . .   | 19       |
| 1.3.2 ppcm . . . . .   | 20       |
| 1.4 Pair et impair . . . . .   | 30       |
| 1.5 Congruence . . . . .   | 33       |
| 1.6 Théorème des restes chinois . . . . .                                  | 46       |
| 1.7 Système de numération . . . . .  | 52       |
| 1.8 Puissances d'entiers . . . . .   | 57       |
| 1.9 Partie entière. Partie fractionnaire . . . . .                         | 72       |
| 1.9.1 Partie entière et points à coordonnées entières . . . . .            | 81       |
| 1.9.2 Quelques identités du type Ramanujan . . . . .                       | 86       |
| 1.10 Fonctions multiplicatives . . . . .                                   | 88       |
| 1.11 Fonction indicatrice d'Euler . . . . .                                | 91       |
| 1.12 Formule de Legendre . . . . .   | 96       |
| 1.13 Théorèmes de Fermat, Euler et Wilson . . . . .                        | 100      |
| 1.13.1 Théorème de Fermat . . . . .  | 100      |
| 1.13.2 Théorème d'Euler . . . . .  | 108      |
| 1.13.3 Théorème de Wilson . . . . .  | 117      |
| 1.14 Racines primitives modulo les premiers . . . . .                      | 120      |
| 1.15 Nombres premiers en progression arithmétique . . . . .                | 123      |
| 1.16 Étude des fonctions $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . . . . . | 127      |
| 1.17 Lemme de Mihai Manea (ou lemme LTE) . . . . .                         | 132      |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 1.18     | Théorème de Zsigmondy . . . . .                                   | 139        |
| 1.19     | Résidus quadratiques. Symbole de Legendre . . . . .               | 142        |
| 1.20     | Nombres de Fermat . . . . .                                       | 154        |
| 1.21     | Nombres de Mersenne . . . . .                                     | 157        |
| 1.22     | Nombres parfaits. Nombres triangulaires . . . . .                 | 158        |
| 1.23     | Coefficients binomiaux . . . . .                                  | 162        |
| 1.24     | Théorème de Lucas . . . . .                                       | 164        |
| 1.25     | Développement additif . . . . .                                   | 167        |
| 1.26     | Quelques méthodes en théorie des nombres . . . . .                | 172        |
| 1.26.1   | Plus grand et plus petit élément . . . . .                        | 172        |
| 1.26.2   | Principe des tiroirs . . . . .                                    | 175        |
| 1.26.3   | Raisonnement par récurrence . . . . .                             | 177        |
| 1.26.4   | Principe d'inclusion-exclusion . . . . .                          | 183        |
| 1.26.5   | « Vieta Jumping » . . . . .                                       | 186        |
| 1.26.6   | Polynômes cyclotomiques . . . . .                                 | 190        |
| 1.27     | Exercices . . . . .   | 193        |
| <b>2</b> | <b>ÉQUATIONS DIOPHANTIENNES</b>                                   | <b>227</b> |
| 2.1      | Méthode de décomposition . . . . .                                | 227        |
| 2.2      | Utilisation des inégalités . . . . .                              | 230        |
| 2.3      | Méthode de la représentation paramétrique . . . . .               | 235        |
| 2.4      | Utilisation de la congruence . . . . .                            | 237        |
| 2.5      | Raisonnement par récurrence . . . . .                             | 242        |
| 2.6      | Méthode de descente infinie . . . . .                             | 246        |
| 2.7      | Méthodes et techniques diverses . . . . .                         | 249        |
| 2.8      | Équations diophantiennes sans solutions entières . . . . .        | 253        |
| 2.9      | Équations diophantiennes avec une infinité de solutions . . . . . | 256        |
| 2.10     | Équations diophantiennes linéaires . . . . .                      | 258        |
| 2.11     | Équations diophantiennes quadratiques . . . . .                   | 261        |
| 2.11.1   | Équation de Pythagore . . . . .                                   | 261        |
| 2.11.2   | Équations de Pell . . . . .                                       | 265        |
| 2.11.3   | Autres équations diophantiennes quadratiques . . . . .            | 274        |
| 2.12     | Diverses équations diophantiennes . . . . .                       | 279        |
| 2.12.1   | Équations cubiques . . . . .                                      | 279        |
| 2.12.2   | Équations diophantiennes polynômiales de degré $\geq 4$ . . . . . | 281        |
| 2.12.3   | Équations diophantiennes exponentielles . . . . .                 | 284        |
| 2.13     | Diviseurs premiers de la forme $4m + 3$ . . . . .                 | 289        |
| 2.14     | Équations diophantiennes du type Euler . . . . .                  | 291        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 2.15     | Méthodes avancées de résolution . . . . .                       | 294        |
| 2.15.1   | L'anneau $\mathbb{Z}[i]$ des entiers de Gauss . . . . .         | 297        |
| 2.15.2   | L'anneau des entiers de $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ . . . . .        | 301        |
| 2.15.3   | Diviseurs de $a^2 + b^2$ avec $a$ et $b$ des entiers . . . . .  | 305        |
| 2.15.4   | Diviseurs de $a^2 + 2b^2$ avec $a$ et $b$ des entiers . . . . . | 307        |
| 2.15.5   | Diviseurs de $a^2 - 2b^2$ avec $a$ et $b$ des entiers . . . . . | 308        |
| 2.16     | Exercices . . . . .   | 309        |
| <b>3</b> | <b>COMBINATOIRE</b>   | <b>321</b> |
| 3.1      | Principes de bases et formules de dénombrement . . . . .        | 321        |
| 3.1.1    | Deux principes basiques de dénombrement . . . . .               | 321        |
| 3.1.2    | Permutation et combinaison sans répétition . . . . .            | 322        |
| 3.1.3    | Permutation circulaire d'éléments distincts . . . . .           | 323        |
| 3.1.4    | Quelques identités combinatoires . . . . .                      | 324        |
| 3.1.5    | Nombre de solutions d'une équation de premier degré . . . . .   | 330        |
| 3.1.6    | Raisonnement par récurrence . . . . .                           | 332        |
| 3.1.7    | Suite de Fibonacci et nombres de Catalan . . . . .              | 338        |
| 3.1.8    | Principe d'inclusion-exclusion . . . . .                        | 340        |
| 3.1.9    | Exercices . . . . .   | 345        |
| 3.2      | Suites récurrentes . . . . .                                    | 349        |
| 3.2.1    | Équation caractéristique . . . . .                              | 350        |
| 3.2.2    | Méthode de substitution . . . . .                               | 352        |
| 3.3      | Principe des tiroirs et principe de la valeur moyenne . . . . . | 356        |
| 3.3.1    | Principe des tiroirs . . . . .                                  | 356        |
| 3.3.2    | Principe de la valeur moyenne . . . . .                         | 366        |
| 3.4      | Invariants . . . . .  | 368        |
| 3.4.1    | Définition et premiers exemples . . . . .                       | 368        |
| 3.4.2    | Coloriage . . . . .   | 372        |
| 3.4.3    | Théorie des jeux . . . . .                                      | 374        |
| 3.5      | Fonctions . . . . .   | 376        |
| 3.5.1    | Les fonctions en combinatoire . . . . .                         | 376        |
| 3.5.2    | Compter de deux façons ! . . . . .                              | 382        |
| 3.5.3    | Mettre en paire . . . . .                                       | 390        |
| 3.6      | Fonctions génératrices . . . . .                                | 394        |
| 3.7      | Classification et méthode des étapes fractionnaires . . . . .   | 399        |
| 3.7.1    | Classification . . . . .  | 399        |
| 3.7.2    | Méthode des étapes fractionnaires . . . . .                     | 402        |
| 3.7.3    | Exercices . . . . .   | 404        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 3.8      | Relations de récurrence . . . . .                           | 408        |
| 3.9      | Méthode d'évaluation . . . . .                              | 420        |
| 3.10     | Raisonnement par l'absurde. Principe extrême . . . . .      | 423        |
| 3.10.1   | Raisonnement par l'absurde . . . . .                        | 423        |
| 3.10.2   | Principe extrême . . . . .                                  | 428        |
| 3.11     | Méthode d'ajustement local . . . . .                        | 430        |
| 3.11.1   | Exercices . . . . .   | 434        |
| 3.12     | Méthodes constructives . . . . .                            | 437        |
| 3.12.1   | Exercices . . . . .   | 442        |
| 3.13     | Problèmes d'existence. Inégalités en combinatoire . . . . . | 446        |
| 3.14     | Maximum et minimum en combinatoire . . . . .                | 453        |
| 3.14.1   | Exercices . . . . .   | 459        |
| 3.15     | Racines de l'unité . . . . .                                | 463        |
| 3.16     | Exercices . . . . .   | 467        |
| <b>4</b> | <b>THÉORIE DES GRAPHERS</b> . . . . .                       | <b>505</b> |
| 4.1      | Définition d'un graphe . . . . .                            | 505        |
| 4.2      | Degré d'un sommet . . . . .                                 | 512        |
| 4.3      | Théorème de Turán . . . . .                                 | 519        |
| 4.4      | Arbres . . . . .  | 527        |
| 4.5      | Problème d'Euler . . . . .                                  | 532        |
| 4.6      | Problème d'Hamilton . . . . .                               | 535        |
| 4.7      | Graphes planaires . . . . .                                 | 543        |
| 4.8      | Théorie de Ramsey . . . . .                                 | 552        |
| 4.9      | Couplages . . . . .   | 570        |
| 4.10     | Exercices . . . . .   | 572        |
| <b>5</b> | <b>POLYNÔMES</b> . . . . .                                  | <b>579</b> |
| 5.1      | Définitions. Généralités . . . . .                          | 579        |
| 5.2      | Polynômes et arithmétique . . . . .                         | 586        |
| 5.3      | Racines et coefficients. Formules de Viète . . . . .        | 591        |
| 5.4      | Dérivée d'un polynôme . . . . .                             | 600        |
| 5.5      | Polynômes irréductibles . . . . .                           | 602        |
| 5.6      | Polynômes d'interpolation de Lagrange . . . . .             | 607        |
| 5.7      | Exercices . . . . .   | 612        |
|          | Bibliographie . . . . .                                     | 639        |
|          | Index . . . . .   | 641        |