3. Explication de la formule de la loi $\mathscr{B}$(n ; p) *(note de la page 152)*

Cherchons par exemple la probabilité p(X=3) pour l'exemple étudié. Nous allons introduire le codage suivant : $SS\overline{S}\ \overline{S}S$ signifiera que l'on a obtenu successivement 2 succès, 2 échecs, 1 succès lors du tirage au hasard successif des 5 CD (succès signifie toujours : CD de 700 MB, échec : CD de 650 MB).
Puisqu'il y a indépendance des résultats successifs, la probabilité de cet événement est :
$0,66 \times 0,66 \times 0,34 \times 0,34 \times 0,66 = 0,66^3 \times 0,34^2$
On trouverait encore la même probabilité pour la succession $S\overline{S}\ S\overline{S}\ S$, et pour toutes les successions aboutissant au résultat X=3.
Il reste à se demander de combien de façons il est possible d'obtenir X=3 ; ce sont toutes les façons de ranger dans un certain ordre les 3 succès S et les 2 échecs $\overline{S}$ **.** Or choisir une telle succession revient à choisir les 3 places (parmi les places 1 à 5) qui seront les places du succès S (et on met $\overline{S}$ aux deux places restant).
Il y a donc autant de façons d'obtenir X=3 qu'il y a de combinaisons de 3 éléments (les 3 places de S) choisis parmi 5 (les 5 places possibles). Cela explique la présence du nombre de combinaison.
On aura ainsi p(X=3) = $\binom{5}{3} \times 0,66^3 \times 0,34^2 = 10 \times 0,66^3 \times 0,34^2 \simeq 0,332$

NB : pour comprendre la formule, il est utile de se reporter aux notions de dénombrements présentées dans les pages suivantes

NB 2 : la notation $\binom{n}{p}$ remplace l'ancienne notation utilisée autrefois au lycée : C_n^p utilisée dans les pages suivantes

DEUX MODELES DE DENOMBREMENT (plus un)

L'objectif n'est pas de vous donner des compétences en dénombrement, qui est une partie difficile des mathématiques. Par contre il est nécessaire de connaître les notations n ! (« factorielle n ») et C_n^p (« C,n,p » : lire les indices de bas en haut), et d'avoir compris les deux notions de « permutation » et de « combinaison »

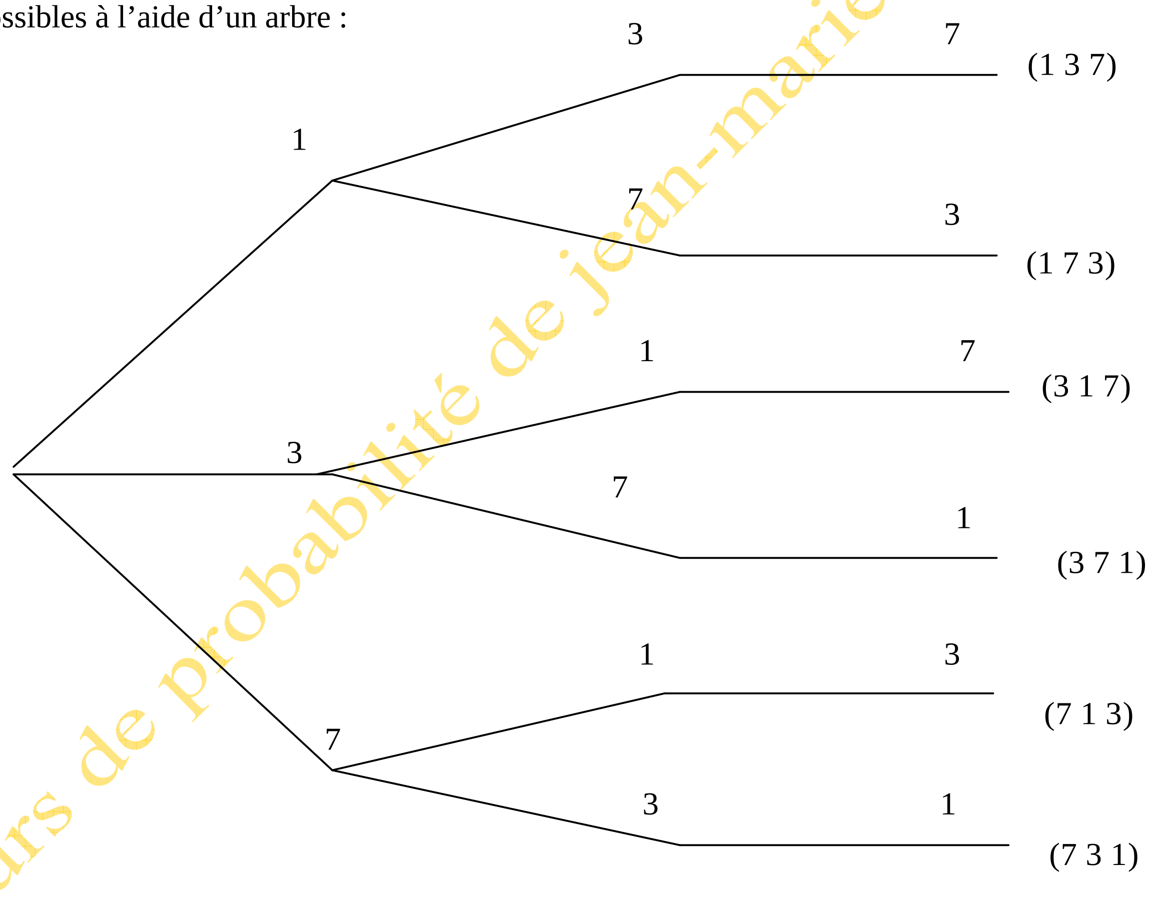
1. Les permutations d'un nombre fini d'éléments

Partons d'un exemple simple : combien de codes différents peut on constituer avec les 3 chiffres {1 ; 3 ; 7 } rangés dans un certain ordre, sans répétition ?

Le raisonnement est simple :

- le 1^er^ chiffre du code peut être n'importe lequel des 3 chiffres : 3 choix
- le 2^ème^ chiffre du code peut être n'importe lequel des 2 chiffres restant (il faut exclure le 1^er^) : 2 choix
- le 3^ème^ est imposé par les 2 premiers : 1 choix (celui qui reste)

Convenons de noter les codes obtenus de la manière suivante : (1 ; 3 ; 7). On peut représenter tous les choix possibles à l'aide d'un arbre :



Finalement on obtient une liste de 6 codes possibles. Chacun de ces codes est appelé une « permutation » des 3 chiffres 1, 3 et 7.
Le nombre des permutations de ces 3 éléments est $3 \times 2 \times 1$, que l'on note 3 ! (lire « factorielle 3 »)

Une permutation de n éléments distincts est le rangement de ces n éléments dans un certain ordre.
Le nombre des permutations de n éléments est n ! = n $\times$ (n-1) $\times$ . . . . . . $\times$ 3 $\times$ 2 $\times$ 1

La notation ! intervient souvent en mathématique. On convient habituellement 0 ! = 1
Vous pouvez connaître quelques valeurs usuelles :

1 ! = 1
2 ! = 2
3 ! = 6
4 ! = 24
5 ! = 120

Remarquez que chacune de ces valeurs peut être obtenue à partir de la précédente :

$$4\,! = 3\,! \times 4 = 6 \times 4 = 24$$
$$5\,! = 4\,! \times 5 = 24 \times 5 = 120$$

etc

et de façon générale :

$$\boxed{n\,! = (n-1)\,! \times n \text{ pour tout entier } n \geqslant 1}$$

Un autre exemple type de permutation est le suivant : combien y-a-t-il de classements différents des 8 finalistes d'une finale de sprint sur 100 m, en supposant qu'il n'y a pas d' ex aequo ?
Chaque classement est une permutation des 8 candidats ; il y a donc 8 ! = 40 320 classements possibles.

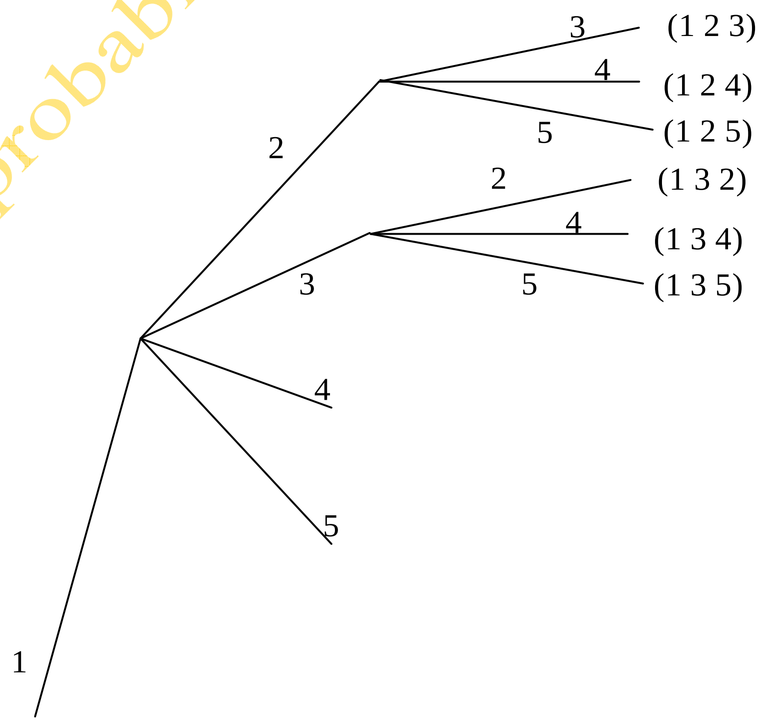
NB : sur les TI, ce résultat s'obtient en choisissant successivement : 8, MATH, PRB, !

2. Le nombre d'arrangements de p éléments choisis parmi n éléments

Vous pouvez sauter ce paragraphe 2 sur les arrangements qui n'est pas indispensable, et passer au 3.

Reprenons l'exemple des classements à une finale de sprint ; mais supposons maintenant qu'il y a seulement 5 coureurs, et que l'on ne s'intéresse qu'aux trois premières places. Combien y-a-t-il de classements différents des 3 premiers (sans ex æquo) ?

Ici il s'agit de ranger dans un certain ordre 3 éléments choisis parmi 5. En supposant que les coureurs ont des dossards numérotés de 1 à 5, on obtiendrait un arbre de choix dont la première branche commencerait ainsi :



Le raisonnement est le suivant :

- le 1er coureur peut être n'importe lequel des 5 coureurs : 5 choix (seul le début de la première branche correspondante a été représenté)
- le 2ème coureur peut être n'importe lequel des 4 coureurs restant (il faut exclure le 1er) : 4 choix
- le 3ème coureur peut être n'importe lequel des 3 coureurs restant (il faut exclure les 2 premiers) : 3 choix

Il va donc y a voir $5 \times 4 \times 3 = 60$ ordres d'arrivées possibles des 3 premiers.

Sur l'arbre présenté ci-dessus, il n'y a que 6 extrémités représentées, correspondant chacune à un ordre d'arrivée possible.

De manière générale :

Un « arrangement » de p éléments distincts choisis parmi n est un rangement de p éléments dans un certain ordre, sans répétition.
Le nombre des arrangements de p éléments distincts choisis parmi n est le produit :

$$\underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots\ldots \times (n-p+1)}$$ de p facteurs distincts décroissant de 1 à partir de n

Ce nombre est habituellement noté A_n^p (lire A, n , p, en commençant par l'indice du bas)
Il est obtenu directement sur la calculatrice, en tapant successivement :
5, MATH, nPr, 3 ; l'affichage est : 5 nPr 3 ; et le résultat est 60.

Une formule de calcul équivalente à la formule indiquée ci-dessus est la suivante :

$$\boxed{A_n^p = \frac{n\,!}{(n-p)\,!}}$$

NB : cette formule n'est pas à connaître ; d'ailleurs vous n'en n'aurez jamais besoin cette année.

3. Le nombre de combinaisons de p éléments choisis parmi n éléments

Ce paragraphe est incontournable ; il faut savoir ce qu'est une combinaison et connaître les nombres C_n^p qui interviennent dans la formule d'une loi de probabilité importante, la loi binomiale.

Commençons par un exemple : de combien de façons est-il possible de choisir 3 personnes parmi 5 ?

Supposons que les 5 personnes soient désignées par l'initiale de leur nom : A, B, C, D, E
L'ensemble des 5 personnes est noté {A, B, C, D, E} (remarquez les accolades)

{A,C,E} est un choix de 3 personnes ; on dit que c'est une combinaison de 3 éléments choisis parmi les 5 éléments possibles. {D,C,B} est une autre combinaison de 3 éléments.
Remarquez que {A,C,E} et {C,E,A}sont la même combinaison : on ne tient pas compte de l'ordre dans lequel les personnes sont nommées, mais seulement de celles qui sont choisies.
Un moyen simple de compter les combinaisons de 3 éléments choisis parmi 5 est de faire la liste de toutes les combinaisons possibles, sans en oublier, en choisissant un ordre logique pour les énumérer ; par exemple :

{A,B,C}	{A,B,D}	{A,B,E}	{A,C,D}	{A,C,E}
{A,D,E}	{B,C,D}	{B,C,E}	{B,D,E}	{C,D,E}

On trouve donc 10 combinaisons possibles, ce que l'on peut écrire : $C_5^3 = 10$

De manière générale :

Une « combinaison » est un choix de p éléments parmi n (sans tenir compte d'un ordre de choix) Le nombre C_n^p des combinaisons de p éléments choisis parmi n est donné par la formule suivante : $$C_n^p = \frac{A_n^p}{p\,!} = \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)}{p\,!} = \frac{n!}{(n-p)\,!\,p\,!}$$

Ces formules ne sont pas à savoir, et vous n'aurez pas à les utiliser. Vous obtenez directement le nombre C_n^p sur votre calculatrice ; par exemple : C_5^3 s'obtient en choisissant successivement : 5, MATHS, PRB, nCr, 3 ; l'affichage est : 5 nCr 3 ; et le résultat est 10.

Explication de la formule *(vous pouvez passez cette explication qui nécessite le paragraphe 2)* :
Le paragraphe 2 nous a appris à compter tous les arrangements de 3 éléments choisis parmi 5 ; nous en avons trouvé 60. Avec les 5 personnes {A, B, C, D, E}, les arrangements consistent à désigner la première, la deuxième, la troisième. Par exemple, avec la combinaison {A,C,E} il est possible de faire les 6 arrangements suivants : (A,C,E) ; (A,E,C) ; (C,A,E) ; (C,E,A) ; (E,A,C) ; (E,C,A).
Et en effet le nombre des arrangements possibles avec les 3 éléments de la combinaison {A,C,E} est le nombre des permutations des 3 éléments A,C,E ; c'est donc 3 ! = 6.
L'idée pour compter les combinaisons est alors la suivante : c'est de faire un tableau, comportant une ligne par combinaison, et sur chaque ligne les 6 arrangements possibles. Ce tableau commencera donc ainsi :

{A,B,C}	(A,B,C)	(A,C,B)	(B,A,C)	(B,C,A)	(C,A,B)	(C,B,A)
{A,B,D}	(A,B,D)	(A,D,B)	(B,A,D)	(B,D,A)	(D,A,B)	(D,B,A)
etc.						

Pour chaque combinaison, les arrangements sont répartis sur 6 colonnes ; on ne sait pas combien il y a de combinaisons, mais on sait qu'il y a 60 arrangements au total à répartir en 6 colonnes ; il faudra donc 10 lignes : c'est le nombre de combinaison. Le raisonnement effectué permet de comprendre que :

$$C_5^3 = \frac{60}{6} = \frac{A_5^3}{3\,!}$$

ce qui est un cas particulier de la formule générale donnée ci-dessus.

4. Quelques propriétés des nombres C_n^p

1) $C_n^0 = 1$ pour tout n, car il y a une seule manière de choisir 0 élément (ne rien choisir)
2) $C_n^n = 1$ pour tout n, car il y a une seule manière de choisir n éléments (tous les choisir)
3) $C_n^1 = n$ pour tout n, car il y a n manières de choisir 1 élément parmi n
4) $C_n^{n-1} = n$ pour tout n, car il y a n manières d'exclure 1 élément parmi n pour en choisir n-1
5) $C_n^{n-p} = C_n^p$ car choisir n-p éléments revient à choisir les p éléments que l'on exclut du choix
6) $C_{n+1}^{p+1} = C_n^{p+1} + C_n^p$ pour tout n, et tout $p \leqslant n-1$

La dernière formule permet de construire le triangle de Pascal.