

Table des matières

1 Algèbre	
1.1 Exercice 1	9
<i>Éléments propres d'un endomorphisme de polynôme.</i>	
<i>Factorisation d'un polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.</i>	
1.2 Exercice 2	18
<i>Éléments propres d'un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.</i>	
<i>Équations différentielles du premier ordre.</i>	
1.3 Exercice 3	21
<i>Étude d'endomorphismes dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.</i>	
<i>Traduction matricielle.</i>	
1.4 Exercice 4	26
<i>Relations coefficients/racines d'un polynôme.</i>	
<i>Condition pour qu'une matrice représente une rotation de \mathbb{R}^3.</i>	
1.5 Exercice 5	31
<i>Espaces vectoriels euclidiens.</i>	
<i>Projecteurs, projecteurs orthogonaux.</i>	
1.6 Exercice 6	34
<i>Isomorphisme entre $\mathbb{R}_5[X]$ et \mathbb{R}^6.</i>	
<i>Caractérisations d'ensembles de polynômes.</i>	
1.7 Exercice 7	37
<i>Endomorphisme sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.</i>	
<i>Condition pour que deux matrices aient une valeur propre commune.</i>	
1.8 Exercice 8	41
<i>Sous espaces de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contenant une matrice non inversible.</i>	
<i>Sous espaces de dimension maximale.</i>	
1.9 Exercice 9	45
<i>Diagonalisabilité d'endomorphismes.</i>	
<i>Sous espaces vectoriels stables par un endomorphisme en dimension 3.</i>	
1.10 Exercice 10	48
<i>Noyaux de la composée de deux endomorphismes.</i>	
<i>Les matrices tAA et $A{}^tA$ sont semblables.</i>	
1.11 Exercice 11	52
<i>Rayon spectral d'un endomorphisme symétrique.</i>	
<i>Valeurs propres du produit de deux matrices symétriques.</i>	
1.12 Exercice 12	57
<i>Composée de deux projecteurs.</i>	

	<i>Écriture d'un endomorphisme comme somme de projecteurs.</i>	
1.13	Exercice 13 <i>Chaîne croissante de noyaux.</i> <i>Utilisation du théorème du rang.</i>	60
1.14	Exercice 14 <i>Diagonalisabilité d'une matrice.</i> <i>Application (non linéaire) sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.</i>	64
1.15	Exercice 15 <i>Polynôme annulateur et diagonalisabilité d'un endomorphisme.</i> <i>Commutant d'un endomorphisme.</i>	69
1.16	Exercice 16 <i>Racines d'un polynôme de degré 3.</i> <i>Limite de la suite des puissances d'une matrice.</i>	72
2	Probabilités	
2.1	Exercice 1 <i>Produit de variables aléatoires i.i.d. Espérance totale.</i> <i>Produit aléatoire de variables aléatoires i.i.d.</i>	77
2.2	Exercice 2 <i>Estimation.</i> <i>Estimateur de variance minimale. Unicité. Cas de la loi de Poisson.</i>	82
2.3	Exercice 3 <i>Médiane d'une variable aléatoire.</i> <i>Minimisation d'une fonction permettant d'obtenir la médiane.</i>	85
2.4	Exercice 4 <i>Fonction de répartition.</i> <i>Différentes méthodes de simulation de lois conditionnelles.</i>	91
2.5	Exercice 5 <i>Estimateurs sans biais.</i> <i>Estimateurs asymptotiquement sans biais. Risque quadratique.</i>	98
2.6	Exercice 6 <i>Convergence en probabilité.</i> <i>Estimateur lié à la fonction $\ln(1 - x)$.</i>	103
2.7	Exercice 7 <i>Couple de variables aléatoires discrètes.</i> <i>Loi du produit. Indépendance.</i>	109
2.8	Exercice 8 <i>Séries numériques.</i> <i>Série de variables aléatoires.</i>	116
2.9	Exercice 9 <i>Variable aléatoire continue.</i> <i>Loi du minimum. Convergence en loi.</i>	122
2.10	Exercice 10 <i>Somme de variables aléatoires continue indépendantes.</i> <i>Loi du maximum.</i>	128
2.11	Exercice 11 <i>Estimation.</i>	133

	<i>Estimateur du maximum de vraisemblance.</i>	
2.12	Exercice 12	136
	<i>Convergence en loi. Théorème de la limite centrée.</i>	
	<i>Intervalles de confiance.</i>	
2.13	Exercice 13	140
	<i>Moyenne et variance empirique.</i>	
	<i>Coefficient de corrélation linéaire.</i>	
2.14	Exercice 14	145
	<i>Optimisation sous contrainte linéaire.</i>	
	<i>Application à la construction d'un estimateur.</i>	
2.15	Exercice 15	151
	<i>Somme de variables aléatoires continues indépendantes.</i>	
	<i>Loi du minimum.</i>	
2.16	Exercice 16	157
	<i>Intégrale de Gauss.</i>	
	<i>Fonction de variables aléatoires liée à cette intégrale.</i>	
2.17	Exercice 17	163
	<i>Moments d'une variables aléatoire.</i>	
	<i>Matrice de Vandermonde. Un exemple.</i>	
2.18	Exercice 18	166
	<i>Fonctions de répartition.</i>	
	<i>Simulation de différentes lois.</i>	
2.19	Exercice 19	173
	<i>Loi normale.</i>	
	<i>Fonction de variables aléatoires suivant une telle loi.</i>	
2.20	Exercice 20	178
	<i>Transformée de Laplace.</i>	
	<i>Propriétés des lois géométriques et exponentielles.</i>	
2.21	Exercice 21	183
	<i>Convergence en loi.</i>	
	<i>Étude de la somme de variables aléatoires indépendantes.</i>	
2.22	Exercice 22	189
	<i>Loi Γ.</i>	
	<i>Application à la convergence de la somme de variables aléatoires.</i>	
2.23	Exercice 23	196
	<i>Coefficient de corrélation linéaire.</i>	
	<i>Matrice de variance-covariance.</i>	
2.24	Exercice 24	200
	<i>Loi normale centrée réduite.</i>	
	<i>Convergence en loi.</i>	
2.25	Exercice 25	206
	<i>Tirages dans une urne.</i>	
	<i>Lois discrètes. Convergences.</i>	
2.26	Exercice 26	210
	<i>Moments d'une loi normale.</i>	
	<i>Fonction de variables aléatoires suivant une telle loi.</i>	
2.27	Exercice 27	214

	<i>Somme de variables aléatoires indépendantes.</i>	
	<i>Cas discret. Cas continu.</i>	
2.28	Exercice 28	219
	<i>Inégalité des grandes déviations.</i>	
	<i>Intervalles de confiance.</i>	
2.29	Exercice 29	225
	<i>Équivalence des restes de séries convergentes.</i>	
	<i>Application à l'obtention d'équivalents de probabilités conditionnelles.</i>	
3	Analyse	
3.1	Exercice 1	231
	<i>Fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}.</i>	
	<i>Prolongement de classe C^1 d'une telle fonction.</i>	
3.2	Exercice 2	236
	<i>Fonction convexe sur un intervalle.</i>	
	<i>Étude des moyennes arithmétiques, géométriques et inverse.</i>	
3.3	Exercice 3	239
	<i>Intégrales impropres.</i>	
	<i>Séries numériques associées.</i>	
3.4	Exercice 4	242
	<i>Endomorphisme sur $E = C^1(\mathbb{R})$.</i>	
	<i>Équations différentielles. Inégalités associées.</i>	
3.5	Exercice 5	246
	<i>Fonctionnelle définie sur un sous espace de $C^0(\mathbb{R})$.</i>	
	<i>Liens avec la primitive.</i>	
3.6	Exercice 6	252
	<i>Moments d'une fonction continue.</i>	
	<i>Démonstration de l'unicité des moments.</i>	
3.7	Exercice 7	256
	<i>Suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.</i>	
	<i>Recherche de la limite de la suite et d'un équivalent de u_n.</i>	
3.8	Exercice 8	259
	<i>Séries numériques. Comparaison série-intégrale.</i>	
	<i>Recherche d'équivalents.</i>	
3.9	Exercice 9	264
	<i>Caractérisation séquentielle de la continuité.</i>	
	<i>Résolution d'une équation fonctionnelle.</i>	
3.10	Exercice 10	267
	<i>Fonction définie par une intégrale.</i>	
	<i>Étude complète (domaine de définition, continuité, limites etc.)</i>	
3.11	Exercice 11	271
	<i>Étude d'une suite.</i>	
	<i>Comparaison avec une intégrale.</i>	
3.12	Exercice 12	275
	<i>Fonction définie par une intégrale impropre.</i>	
	<i>Conditions nécessaire et suffisante de convexité.</i>	
3.13	Exercice 13	278

	<i>Fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}.</i>	
	<i>Extremums. extremums sous contrainte linéaire.</i>	
3.14	Exercice 14	282
	<i>Fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}.</i>	
	<i>Équation aux dérivées partielles.</i>	
3.15	Exercice 15	285
	<i>Fonction de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}.</i>	
	<i>Points critiques. Extremums sur un fermé borné.</i>	
3.16	Exercice 16	289
	<i>Fonction définie sur \mathbb{R}^2 à l'aide d'une intégrale.</i>	
	<i>Extremums.</i>	
3.17	Exercice 17	292
	<i>Suite définie par récurrence.</i>	
	<i>Limite. Équivalents.</i>	
3.18	Exercice 18	295
	<i>Équation différentielles non linéaire.</i>	
	<i>Résolution par le théorème des accroissements finis.</i>	
3.19	Exercice 19	298
	<i>Suite définie par récurrence.</i>	
	<i>Équivalent. calcul de la somme.</i>	
3.20	Exercice 20	302
	<i>Fonction définie par une intégrale. Suite associée</i>	
	<i>Limite et équivalent du terme général.</i>	
3.21	Exercice 21	306
	<i>Reste d'intégrale convergente.</i>	
	<i>Limite d'une suite définie par une intégrale.</i>	
3.22	Exercice 22	311
	<i>Série de fonctions.</i>	
	<i>Résolution d'équations fonctionnelles associées.</i>	
3.23	Exercice 23	314
	<i>Tirage dans une urne.</i>	
	<i>Maximum sous contrainte linéaire.</i>	
3.24	Exercice 24	318
	<i>Forme quadratique.</i>	
	<i>Points critiques et extremums d'une fonction de n variables.</i>	
3.25	Exercice 25	321
	<i>Convexité d'une fonction réelle.</i>	
	<i>Convexité d'une fonction vectorielle.</i>	
3.26	Exercice 26	324
	<i>Fonction indicatrice d'un ensemble.</i>	
	<i>Série génératrice exponentielle d'une suite, d'un ensemble.</i>	