# Chapitre 1

# Algèbre

## 1.1 Exercice 1

**Question de cours :** Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite réelle décroissante soit convergente.

Soit $n$ un entier de $\mathbb{N}^*$ et $M_n$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. (a) Montrer que le réel $\lambda$ est valeur propre de $M_n$ si et seulement si le polynôme $P_n(X) = X^n - X^{n-1} - X^{n-2} - \cdots - 1$ admet $\lambda$ comme racine.

   (b) Déterminer alors le sous-espace propre associé à $\lambda$.
2. (a) Montrer que pour tout entier $k$ supérieur ou égal à 2, le polynôme $P_k$ admet une unique racine dans l'intervalle $]1, +\infty[$, racine notée $a_k$.

   (b) Établir la convergence de la suite $(a_k)_{k\geqslant 2}$.

   (c) Déterminer sa limite $\ell$
3. (a) Montrer que pour tout entier $p$ de $\mathbb{N}^*$, le polynôme $P_{2p}$ admet une unique racine dans $]-\infty, 0[$, racine notée $b_p$.

   (b) Établir la décroissance, puis la convergence de la suite $(b_p)_{p\geqslant 1}$. Déterminer sa limite $\ell'$.

   (c) Déterminer un équivalent simple de $b_p - \ell'$.
4. (a) Déterminer les valeurs de $n$ de $\mathbb{N}^*$ pour lesquelles la matrice $M_n$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   (b) Déterminer les valeurs de $n$ de $\mathbb{N}^*$ pour lesquelles la matrice $M_n$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

## Corrigé

1. (a) Soit $\lambda$ une valeur propre de $M_n$ et $V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

La relation $M_nV = \lambda V$ entraîne alors les systèmes suivants :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = \lambda x_1 \\ x_{i-1} = \lambda x_i \ (2 \leqslant i \leqslant n) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = \lambda x_1 \\ x_i = \lambda^{n-i} x_n \ (1 \leqslant i \leqslant n) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda^{n-i}\right) x_n = \lambda^n x_n \\ x_i = \lambda^{n-i} x_n \ (1 \leqslant i \leqslant n) \end{cases}$$

Ce dernier système admet des solutions si et seulement si l'équation :

$$\big(\lambda^n - (1 + \lambda + \cdots + \lambda^{n-1})\big)x_n = 0$$

est vérifiée.

Comme $V$ est vecteur propre, il est non nul et on a donc nécessairement $x_n \neq 0$. En effet, si $x_n$ était nul, les équations précédentes fourniraient $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, ce qui est donc impossible.

Finalement, si le système $M_nV = \lambda V$ possède des solutions non nulles alors $P_n(\lambda) = 0$.

Réciproquement supposons que $P_n\left(\lambda\right) = 0$, nous avons donc :

$$\lambda^n - \lambda^{n-1} - \lambda^{n-2} - \cdots - 1 = 0$$

Au regard des coefficients de la matrice $M_n$ si l'on pose :

$$X = \begin{bmatrix} \lambda^{n-1} \\ \lambda^{n-2} \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

colonne non nulle puisque son dernier élément vaut 1, nous constatons que :

$$M_nX = \begin{bmatrix} \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} + \cdots + 1 \\ \lambda^{n-1} \\ \lambda^{n-2} \\ \vdots \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^n \\ \lambda^{n-1} \\ \lambda^{n-2} \\ \vdots \\ \lambda \end{bmatrix}$$

et puisque $P_n(\lambda) = 0$

$$M_nX = \begin{bmatrix} \lambda^n \\ \lambda^{n-1} \\ \lambda^{n-2} \\ \vdots \\ \lambda \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \lambda^{n-1} \\ \lambda^{n-2} \\ \lambda^{n-3} \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

En conclusion $M_nX = \lambda X$ et $X$ est donc un vecteur propre de $M_n$ de valeur propre associée $\lambda$.

(b) On constate alors que le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $V_\lambda$, où :

$$V_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda^{n-1} \\ \lambda^{n-2} \\ \vdots \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. (a) Pour chercher les racines de $P_k$, on remarque que :

$$P_k(X) = X^k - \sum_{j=0}^{k-1} X^j$$

donc, en utilisant la classique identité remarquable

$$(X-1)(\sum_{j=0}^{k-1} X^j = X^k - 1$$

on obtient :

$$(X-1)P_k(X) = X^{k+1} - X^k - (X^k - 1) = X^{k+1} - 2X^k + 1 = Q_k(X)$$

Comme $X - 1$ ne possède pas de racine sur l'intervalle $]1, +\infty[$, chercher les racines de $P_k$ sur l'intervalle considéré revient à chercher celle de $Q_k$.
On étudie donc ce polynôme sur cet intervalle.
Sa dérivée est :

$$Q_k'(X) = (k+1)X^k - 2kX^{k-1}$$

soit

$$Q_k' = X^{k-1}\left((k+1)X - 2k\right)$$

Cette dérivée s'annule en $\dfrac{2k}{k+1}$, valeur qui, comme $k$ est supérieur ou égal à 2, est bien strictement plus grande que 1.
On obtient donc le tableau de variation suivant :

| $x$ | $1$ | | $\frac{2k}{k+1}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $Q'_k(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $Q_k(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-m$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

où $m$ est un réel strictement positif.
La fonction $Q_k$ reste strictement négative sur l'intervalle $]1, \frac{2k}{k+1}]$ tandis que le théorème de la bijection appliqué à $Q_k$ sur l'intervalle $\left]\frac{2k}{k+1}, +\infty\right[$ permet d'affirmer qu'il existe un unique réel $a_k$ de $]\frac{2k}{k+1}, +\infty[$ tel que $Q_k(a_k) = 0$ et donc tel que $P_k(a_k) = 0$.
On constate de plus que, d'une part $\frac{2k}{k+1} < 2$ et que d'autre part, $Q_k(2) = 1$ est strictement positif.
Le théorème de la bijection permet alors, en revenant aux antécédents, d'affirmer que que $a_k$ est strictement inférieur à 2.
On a donc même plus précisément le tableau suivant :

| $x$ | $1$ | | $\frac{2k}{k+1}$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Q'_k(x)$ | | $-$ | $0$ | | $+$ | | | | |
| $Q_k(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-m$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Ceci permet d'affiner l'étude de $a_k$ : $1 < a_k < 2$.

(b) La suite $(a_k)$ étant bornée, on étudie son éventuelle monotonie afin de montrer sa convergence.
Pour cela, on s'intéresse à l'expression $Q_{k+1}(X) - Q_k(X)$.
On a successivement :

$$Q_{k+1}(X) - Q_k(X) = [X^{k+2} - 2X^{k+1} + 1] - [X^{k+1} - 2X^k + 1]$$
$$Q_{k+1}(X) - Q_k(X) = X^{k+2} - 3X^{k+1} + 2X^k = X^k(X-1)(X-2)$$

Comme $Q_{k+1}(a_{k+1}) = 0$, en évaluant cette dernière égalité en $a_{k+1}$, on obtient :

$$-Q_k(a_{k+1}) = a_{k+1}^k(a_{k+1} - 1)(a_{k+1} - 2)$$

Or, on vient de voir que le réel $a_k$ était strictement compris entre 1 et 2.

Cela, combiné à la dernière égalité obtenue, permet d'affirmer que, pour tout entier naturel $k$ supérieur ou égal à 2, $Q_k(a_{k+1})$ est strictement positif, c'est-à-dire que l'on a l'inégalité

$$Q_k(a_{k+1}) > Q_k(a_k)$$

Comme, sur l'intervalle considéré, la fonction $Q_k$ est une bijection strictement croissante, on en déduit en revenant aux antécédents que, pour tout entier naturel $k$ supérieur ou égal à 2, on a :

$$a_k < a_{k+1}$$

Ainsi, la suite $(a_k)_{k \geqslant 2}$ est croissante et majorée, elle est donc convergente.

(c) On sait que la suite $(a_k)_{k \geqslant 2}$ est convergente et que sa limite $\ell$ appartient à $[1, 2]$. La relation $Q_k(a_k) = 0$ donne $a_k^{k+1} - 2a_k^k + 1 = 0$, soit encore :

$$\forall k \geqslant 2 \quad a_k^k(a_k - 2) = -1$$

Comme, pour tout entier naturel $k$ supérieur ou égal à 2, $a_k$ est strictement positif, on peut écrire cette dernière égalité sous la forme :

$$\forall k \geqslant 2 \quad e^{k \ln(a_k)}(a_k - 2) = -1$$

Si $\ell$ appartenait à $]1, 2[$, on obtiendrait, par continuité

$$\lim_{k \to +\infty} e^{k \ln(a_k)} = +\infty$$

et donc

$$\lim_{k \to +\infty} e^{k \ln(a_k)}(a_k - 2) = -\infty$$

Or $e^{k \ln(a_k)}(a_k - 2) = -1$, donc $e^{k \ln(a_k)}(a_k - 2)$ ne peut pas tendre vers $-\infty$.

Reste donc comme possibilités $\ell = 1$ ou $\ell = 2$.

Or la suite est croissante et $a_2$, qui est la solution positive de l'équation $X^2 - X - 1$, est strictement plus grand que 1.

Le passage à la limite dans l'inégalité $a_2 \leqslant a_k$ prouve donc que la valeur $\ell = 1$ est impossible.

Conclusion : $\ell = 2$.

3. (a) On procède comme précédemment :

$$(X - 1)P_{2p}(X) = X^{2p+1} - 2X^{2p} + 1$$

d'où, en posant $Q_{2p}(X) = X^{2p+1} - 2X^{2p} + 1$

$$(X - 1)P_{2p}(X) = Q_{2p}(X)$$

On obtient $Q'_{2p}(X) = (2p + 1)X^{2p} - 4pX^{2p-1}$ soit

$$Q'_{2p}(X) = X^{2p-1}\big((2p + 1)X - 4p\big)$$

Lorsque $X$ est négatif, $X^{2p-1}$ et $(2p+1)X-4p$ sont négatifs.
On en déduit que $Q_{2p}$ réalise une bijection strictement croissante de $]-\infty,0]$ sur $]-\infty,1]$.
Le théorème de la bijection permet d'affirmer qu'il existe bien un unique réel $b_p$ appartenant à $]-\infty,0]$ tel que $P_{2p}(b_p)=0$.

(b) Le calcul de $Q_{2p}(-1)$ donne $Q_{2p}(-1)=-2$.
On a donc le tableau de variation suivant :

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $b_p$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|
| $Q'_{2p}(x)$ | | $+$ | | |
| $Q_{2p}(x)$ | $-\infty$ | $-2$ | $0$ | $1$ |

On constate donc que la suite $(b_p)$ est bornée.
Pour étudier sa monotonie, on procède comme d'habitude :
En posant $R_p(X)=Q_{2p+2}(X)-Q_{2p}(X)$, on a successivement :

$$R_p(X)=(X^{2p+3}-2X^{2p+2}+1)-(X^{2p+1}-2X^{2p}+1)$$

$$R_p(X)=X^{2p+3}-2X^{2p+2}-X^{2p+1}+2X^{2p}$$

$$R_p(X)=X^{2p}(X^3-2X^2-X+2)$$

Soit finalement

$$Q_{2p+2}(X)-Q_{2p}(X)=X^{2p}(X-1)(X+1)(X-2)$$

On évalue cette égalité en $b_{p+1}$ :

$$Q_{2p+2}(b_{p+1})-Q_{2p}(b_{p+1})=b_{p+1}^{2p}(b_{p+1}-1)(b_{p+1}+1)(b_{p+1}-2)$$

Or, d'une part, $Q_{2p+2}(b_{p+1})=0$ et d'autre part le tableau de variation précédent permet d'obtenir :

$$b_{p+1}^{2p}>0,\quad b_{p+1}-1<0,\quad b_{p+1}+1>0,\quad b_{p+1}-2<0.$$

Tout cela fait que $Q_{2p}(b_{p+1})<0$.
L'étude du tableau de variation de $Q_{2p}$ montre alors, toujours en revenant aux antécedents, que $b_{p+1}<b_p$, puisque $Q_{2p}(b_{2p})=0$.
Comme cette inégalité est vraie pour tout entier $p$ non nul, on en déduit que la suite $(b_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
Le tableau de variation de $Q_{2p}$ montre que la suite $(b_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par $-1$. La suite est décroissante et minorée, elle est donc convergente.

D'après l'étude précédente, le réel $\ell'$ appartient à l'intervalle $[-1, 0]$.
La relation $Q_{2p}(|b_p|) = 0$ donne successivement :

$$-|b_p|^{2p+1} - 2|b_p|^{2p} + 1 = 0$$

$$-|b_p|^{2p}\left[|b_p| + 2\right] = -1$$

$$-e^{2p\ln(|b_p|)}\left[|b_p| + 2\right] = -1$$

Une analyse semblable à celle faite pour la suite $(a_n)$, permet de conclure que l'hypothèse $-1 < \ell' < 0$ conduit à une impossibilité. Il reste donc $\ell' = 0$ ou $\ell' = -1$.
La suite est décroissante. Un calcul simple montre que $b_2$ est strictement négatif. On en déduit donc que la seule possibilité est $\ell' = -1$.

Conclusion : $\ell' = -1$.

(c) On cherche donc un équivalent de $1 + b_p$. Posons $\alpha_p = 1 + b_p$ donc $(\alpha_p)$ est une suite qui tend vers 0.
On a

$$(\alpha_p - 1)^{2p+1} - 2(\alpha_p - 1)^{2p} + 1 = 0$$

soit

$$(\alpha_p - 1)^{2p}(\alpha_p - 1 - 2) + 1 = 0$$

ou encore :

$$(\alpha_p - 1)^{2p}(\alpha_p - 3) + 1 = 0$$

et

$$(\alpha_p - 1)^{2p} = \frac{1}{3 - \alpha_p}.$$

En appliquant la fonction ln : $2p\ln|1 - \alpha_p| = \ln\dfrac{1}{3 - \alpha_p}$.
Comme la suite $(\alpha_p)$ tend vers 0, la quantité $1 - \alpha_p$ est positive à partir d'un certain rang. On a donc, à partir d'un certain rang, :

$$2p\ln(1 - \alpha_p) = \ln\frac{1}{3 - \alpha_p}$$

Toujours en utilisant le fait que $(\alpha_p)$ tende vers 0, on a l'équivalent classique :

$$\ln(1 - \alpha_p) \underset{0}{\sim} -\alpha_p$$

En prenant un équivalent des chaque membre de l'égalité, on obtient donc :

$$-2p\alpha_p \underset{0}{\sim} \ln\frac{1}{3}.$$

soit :

$$(b_p - \ell') \underset{0}{\sim} \frac{\ln(3)}{2p}$$

4. (a) Si $n$ est pair, en posant $n = 2p$ on obtient pour $Q_n$ le tableau de variation suivant :

| $x$ | $-\infty$ | $b_p$ | $0$ | $1$ | $\dfrac{2n}{2n+1}$ | $a_{2p}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Q'_n(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $Q_n(x)$ | $-\infty$ | ↗ $0$ ↗ | $1$ | ↘ $0$ ↘ | $-m$ | ↗ $0$ ↗ | $+\infty$ |

Comme 1 n'est pas racine de $P_n$, on en déduit que $P_n$ possède deux racines distinctes $a_{2p}$ et $b_p$.
$M_n$ possède donc deux valeurs propres distinctes associées à des sous-espace de dimension 1.
On en déduit que si $n$ est pair, $M_n$ n'est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ que dans le cas $n = 2$. Si $n$ est impair on obtient le tableau suivant :

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $\dfrac{2n}{n+1}$ | $a_n$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $Q'_n(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $Q_n(x)$ | $+\infty$ | ↘ $0$ ↘ | $-m$ | ↗ $0$ ↗ | $+\infty$ |

Comme précédemment, 1 n'est pas racine de $P_n$. Le tableau précédent montre donc que $M_n$ possède une seule valeur propre réelle.
$M_n$ n'est donc pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
On le montre classiquement à l'aide d'une démonstration par l'absurde :
Si $M_n$ était diagonalisable, on aurait $M_n = PDP^{-1}$ avec $D = a_n I$, c'est-à-dire qu'on aurait $M_n = a_n I$, ce qui est faux.

En conclusion : si $n$ est impair, différent de 1, $M_n$ n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

(b) On a vu dans la première question que le complexe $a$ est valeur propre de $M_n$ si et seulement si $a$ est racine de $P_n$ et qu'alors le sous- espace propre associé est de dimension 1.
On a également vu que $(X-1)P_n(X) = Q_n(X) = X^{n+1} - 2X^n - 1$ et que 1 n'est pas valeur propre de $M_n$.

Montrons que les racines complexes de $P_n$ sont simples, c'est-à-dire qu'on ne peut avoir $P_n(\lambda) = P'_n(\lambda) = 0$.