
Chapitre I

Définitions et équations fondamentales

1 Objectifs et notions fondamentales

La mécanique des fluides a pour objet l'étude des systèmes fluides et des interactions avec leur environnement. Dans un grand nombre de systèmes, les fluides jouent le rôle de vecteur d'énergie, ils permettent de transporter des espèces, de la chaleur, de stocker de l'énergie, de la restituer sous forme cinétique. Le corps humain a besoin du sang pour transporter les éléments vitaux dans l'organisme, certains modes de chauffage reposent sur le transport d'un fluide caloporteur au travers d'un radiateur, les barrages hydroélectriques tirent leur énergie du stockage d'un grand volume d'eau en altitude. . . Comprendre le mouvement des fluides et la façon dont ils agissent sur les autres éléments des systèmes permet d'assurer le bon fonctionnement de l'ensemble. Le fluide est généralement un sous-système d'un système plus large, la mécanique des fluides permet d'étudier en détail ce sous-système fluide et d'en extraire des grandeurs (forces, puissances, énergies, débits. . .) utiles à la conception, le dimensionnement et l'optimisation des systèmes naturels ou artificiels. Les mêmes lois permettent de prédire l'évolution du climat, le fonctionnement d'un moteur automobile ou le vol d'un avion.

1.1 Définitions

Les fluides peuvent avoir des caractéristiques très différentes les uns des autres. Pour revenir à l'exemple du corps humain, le sang qui circule dans les veines et l'air que l'on respire ont des propriétés très différentes mais ce sont pourtant tous les deux des fluides. Ce qui les différencie sont leur viscosité, leur capacité à transporter de la chaleur, des espèces, leur comportement lorsque la pression et la température varient. . . . De façon très générale, **un fluide est un milieu qui adapte sa forme à son contenant**, c'est-à-dire que l'on peut le déformer avec un effort infinitésimal. Un doigt permet de faire des

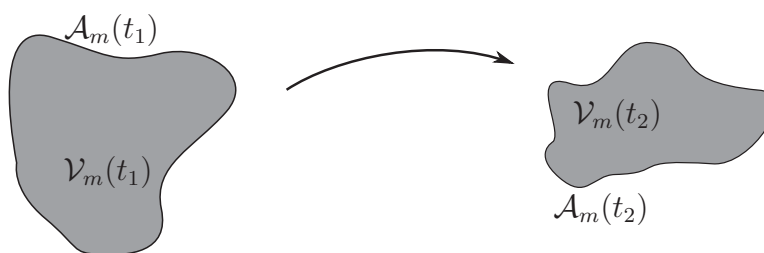


FIGURE 1.1 : Un volume fluide matériel est délimité par une surface qui peut se déformer dans le temps. Cependant le volume contient toujours les mêmes molécules au cours du temps.

dessins dans le sable, le vent crée des rides à la surface de l'eau, le souffle d'un enfant peut éteindre une bougie.

Un volume donné de fluide représente un *système fluide* au même titre qu'un volume solide (par exemple une pierre) représente un système solide ; on parle dans les deux cas d'un *système matériel* défini par un volume et une surface matériels notés respectivement $\mathcal{V}_m(t)$ et $\mathcal{A}_m(t)$ (Figure 1.1). Un caillou possède une frontière fixe qui le délimite dans l'espace, un ensemble de lois fondamentales s'appliquent à ce système et permettent de prévoir son comportement. Un volume fluide peut se déformer au cours du temps. La loi de conservation de la masse prévoit que, quelque soit le mouvement du caillou sa masse restera toujours la même, la loi fondamentale de la dynamique affirme que si une force est appliquée au caillou, celui-ci va accélérer. Ces lois s'appliquent au système et permettent de prévoir son évolution. D'autres lois caractérisent le matériau qui compose le caillou ; une maison construite en argile serait beaucoup plus fragile qu'une maison construite en pierre. Des lois comportementales permettent de prévoir comment le matériau du caillou va se comporter : les lois de la chimie permettent de prévoir la réaction possibles de décomposition, les lois de résistance des matériaux permettent de prévoir si le caillou va pouvoir se déformer (comportement élastique), ou à partir de quel effort la rupture va se produire. De façon similaire, la mécanique des fluides utilise des lois de comportement pour caractériser un fluide et des lois de conservation (masse, quantité de mouvement, énergie) pour étudier le comportement d'un système fluide. Une différence de taille apparaît cependant rapidement. La surface d'un volume de fluide se déforme très facilement, il sera donc très difficile, en pratique, de "suivre" l'évolution d'un volume fluide comme on suivrait le caillou dans son mouvement.

1.2 Lois thermodynamiques

Un système matériel fluide doit en premier lieu satisfaire aux principes de la thermodynamique (Figure 1.2). On considère un volume matériel fluide $\mathcal{V}_m(t)$ délimité par une surface fermée $\mathcal{A}_m(t)$ perméable à la chaleur et au travail. Le premier principe indique que la variation d'énergie totale E du système entre un état 1 et un état 2 est égale à la

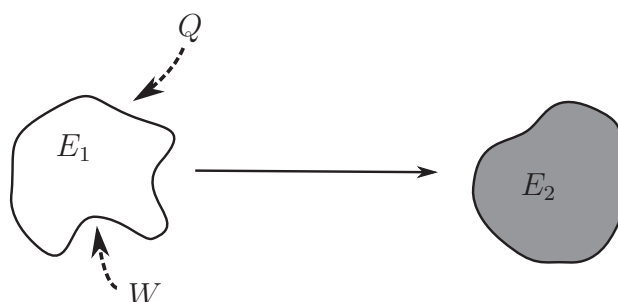


FIGURE 1.2 : *Le premier principe de la thermodynamique appliqué à un système fermé indique que la variation d'énergie $E_2 - E_1$ entre un état 1 et un état 2 est égale à la somme de la chaleur et du travail reçus au cours de la transformation.*

somme du travail W et de la chaleur Q reçus au cours de la transformation qui mène le système du premier état au second :

$$W + Q = E_2 - E_1$$

l'énergie totale du système étant la somme de l'énergie interne, de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. Dans le cas d'un système fluide, il est fréquent que le volume ne soit pas fermé mais ouvert, c'est-à-dire qu'il possède une entrée et une sortie de matière. Dans ce cas, pour exprimer l'énergie totale du système, on utilise l'enthalpie au lieu de l'énergie interne.

Le second principe de la thermodynamique s'applique également à un système fluide. Il existe une fonction d'état S , l'entropie, associée au système qui permet de caractériser l'irréversibilité de certains processus physiques comme la transformation de travail en chaleur. Une variation élémentaire d'entropie dS , que connaît un système au cours d'une transformation élémentaire, est la somme d'une contribution externe au système $\delta_e S$ et une contribution interne au système $\delta_i S$. Ainsi :

$$dS = \delta_e S + \delta_i S \quad \text{avec} \quad \delta_i S \geq 0$$

Si $\delta_i S$ est nulle, la transformation est réversible. Autrement, $\delta_i S$ est positive et la transformation est irréversible. Dans le cas d'un système fermé, la contribution extérieure s'écrit :

$$\delta_e S = \frac{\delta Q}{T}$$

L'objet ici n'est pas de refaire un cours de thermodynamique mais de souligner le fait qu'un volume fluide est un système thermodynamique, et donc satisfait aux principes fondamentaux.

1.3 Lois fondamentales

Le volume $\mathcal{V}_m(t)$ est un volume matériel définissant un système fluide auquel s'appliquent les lois fondamentales des systèmes. En premier lieu, la masse m de fluide

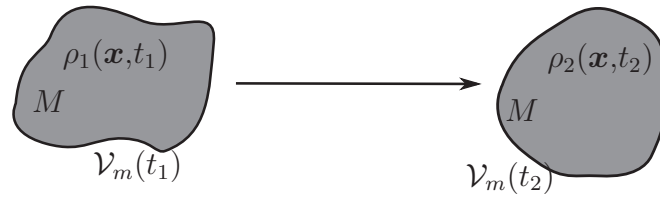


FIGURE 1.3 : *Un volume matériel peut se déformer dans le temps. La distribution de masse volumique peut évoluer mais le système étant fermé, la masse totale se conserve.*

contenu dans le volume matériel \mathcal{V}_m se conserve. On peut donc écrire :

$$\frac{dm}{dt} = 0$$

De façon pratique, il est difficile d'accéder à la masse d'un volume de fluide car il arrive fréquemment que le volume ne soit pas homogène, c'est-à-dire que la masse volumique du fluide ρ change d'un endroit à l'autre du volume : la masse volumique dépend de l'espace et du temps $\rho(\mathbf{x}, t)$ (Figure 1.3). La masse de fluide est alors définie comme l'intégrale de la masse volumique sur l'ensemble du volume matériel. La conservation de la masse s'écrit alors :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho(\mathbf{x}, t) dV = 0 \quad (1.1)$$

Cette écriture permet également de prendre en compte le fait que le volume fluide \mathcal{V}_m peut être en mouvement ou se déformer : il varie dans le temps.

Un système fluide satisfait également à la loi fondamentale de la dynamique : si l'on exerce une force sur le système, on modifie sa quantité de mouvement suivant la loi $\mathbf{F} = d(m\mathbf{v})/dt$. Ici, \mathbf{F} représente la somme de toutes les forces qui s'appliquent sur le fluide. Lorsque l'on applique ce principe à un système fluide, il faut prendre en compte l'inhomogénéité de la masse volumique et des vitesses dans l'espace ainsi que leur variation dans le temps. On écrit donc la variation de quantité de mouvement comme l'intégrale de la quantité $\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ sur le volume matériel :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_m(t)} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dV = \mathbf{F} \quad (1.2)$$

Les forces sont réparties en deux catégories : les forces surfaciques qui s'exercent sur le contour \mathcal{A}_m du volume et les forces volumiques qui s'appliquent en tout point du volume \mathcal{V}_m .

Pour étudier le comportement d'un fluide, on dispose donc des mêmes outils que pour l'étude de n'importe quel système mécanique. Les lois de la thermodynamique permettent d'écrire la conservation de l'énergie du système en fonction des échanges de chaleur et de travail avec l'extérieur. Le système satisfait également à la loi de conservation de la masse et la loi fondamentale de la dynamique. Il est important de noter

que cette dernière loi fournit une relation vectorielle entre les forces et les variations de quantité de mouvement. Ces relations vont permettre de définir un système d'équations où les inconnues sont les composantes du champ de vitesse et la pression dans le fluide.

Les relations fondamentales de la mécanique des fluides sont héritées de lois plus générales relativement simples. Ces lois sont applicables sur un volume matériel, mais en mécanique des fluides, cette contrainte pose une difficulté car **il est très difficile d'isoler un volume fluide au sein d'un système**. Si l'on prend l'exemple de l'air et du combustible qui traversent un turboréacteur pour générer une poussée, le système matériel fluide est impossible à prendre en compte dans son ensemble puisque l'air s'écoule à très grande vitesse et que la taille du volume matériel est considérable. On préfère choisir un volume arbitraire $\mathcal{V}_a(t)$ associé au corps du turboréacteur pour étudier l'action du fluide sur les organes mécaniques. La particularité de la mécanique des fluides est donc d'appliquer des lois valables pour des volumes matériels à des volumes arbitraires qui ne sont pas nécessairement liés aux fluides étudiés.

1.4 Milieu continu

La définition d'un fluide comme un milieu capable de se déformer sous une contrainte très faible rend compte de la nature microscopique de ce fluide. En regardant de plus près, un fluide est constitué de molécules : une molécule d'air occupe approximativement une sphère de diamètre $d = 3,7 \text{ \AA}$. Dans les conditions ambiantes de pression et température, un volume de 22,4 L contient \mathcal{N}_a molécules, où $\mathcal{N}_a = 6,023 \cdot 10^{23}$ molécules est le nombre d'Avogadro. Une molécule d'air dispose donc d'environ 1 400 fois son volume pour se déplacer avant de rencontrer une autre molécule : à l'échelle moléculaire, la matière est discrète. Le nombre de Knudsen K_n est un nombre sans dimension permettant de comparer l'échelle caractéristique du système étudié l et le libre parcours moyen λ d'une molécule :

$$\lambda = \frac{1}{2\sqrt{\pi}nd^2}$$

où n est le nombre de molécules par unité de volume.

À l'échelle macroscopique, le nombre de Knudsen est très petit devant l'unité. On peut alors considérer que **le fluide est un milieu continu**. Les propriétés du fluide (la vitesse, la pression, la température...) sont définies par des variables continues dans tout l'espace. Toute grandeur $\phi(x,y,z)$ mesurée en un point de l'espace est en réalité une moyenne sur toutes les molécules contenues dans une particule fluide dV centrée en (x,y,z) (voir Figure 1.4). Le volume dV doit être plus grand qu'un volume dV_{\min} afin qu'il contienne un nombre statistiquement significatif de molécules, et suffisamment petit pour pouvoir être considéré comme ponctuel à l'échelle macroscopique.

Ainsi, il est possible de définir en tout point de l'espace $\mathbf{x} = (x,y,z)$ la masse volumique $\rho(\mathbf{x},t)$ du fluide :

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \lim_{\delta V \rightarrow dV_{\min}} \bar{\rho} = \lim_{\delta V \rightarrow dV_{\min}} \frac{\delta m}{\delta V}$$

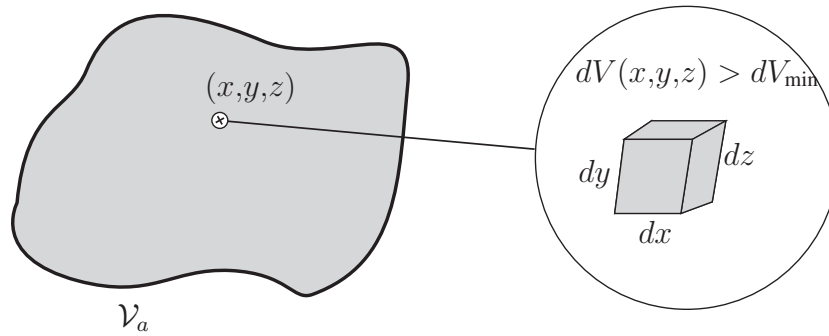


FIGURE 1.4 : En un point (x, y, z) du volume macroscopique \mathcal{V}_a est défini un volume élémentaire dV (une particule fluide) de dimensions $dx dy dz$. Le volume dV contient suffisamment de molécules du fluide pour définir des grandeurs moyennes.

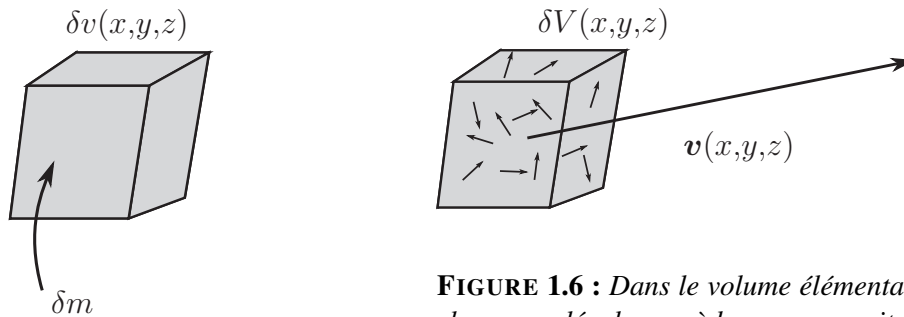


FIGURE 1.5 : Le volume δv est fermé et contient une masse δm constante.

FIGURE 1.6 : Dans le volume élémentaire δV , chaque molécule possède sa propre vitesse. La vitesse locale du fluide en $\mathbf{x} = (x, y, z)$ est la moyenne des vitesses des molécules.

où δm est la masse de fluide contenu dans le volume δV .

De même, la vitesse locale $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ dans le fluide est définie comme la limite de la vitesse moyenne quand le volume fluide tend vers le volume minimal

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \lim_{\delta V \rightarrow dV_{\min}} \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) \quad \text{avec} \quad \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$$

où N est le nombre de molécules contenues dans le volume δV .

Une autre grandeur importante en mécanique des fluides est le vecteur contrainte \mathbf{t} qui est la force exercée sur la surface du volume de contrôle par unité de surface :

$$\bar{\mathbf{t}}(\mathbf{n}) = \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta A} \quad \text{et} \quad \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) = \lim_{\delta V \rightarrow dV_{\min}} \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, t)$$

Dans la majorité des cas d'étude, cette hypothèse de milieu continu est satisfaite. Quelques situations particulières nécessitent un examen plus approfondi, en particulier lorsque le

milieu est peu dense. On se tournera alors vers la théorie cinétique des gaz où chaque molécule de fluide est considérée comme une sphère indéformable qui interagit avec ses voisins et son environnement.

2 Propriétés des fluides

Les lois mécaniques introduites précédemment dépendent des propriétés du fluide étudié. On peut citer par exemple la compressibilité, la viscosité, le coefficient de diffusion thermique...

2.1 Viscosité

La viscosité μ est une grandeur qui permet de relier la déformation que subit une particule fluide à la contrainte qui lui est appliquée. Plus la viscosité est grande, plus il faudra une contrainte forte pour déformer une particule fluide. Cette grandeur s'exprime en kilogramme par mètre et par seconde. On parle aussi de viscosité dynamique pour la différentiel de la viscosité cinématique $\nu = \mu/\rho$. La viscosité d'un fluide évolue avec la température ambiante et plusieurs lois permettent de rendre compte de cette évolution. La plus simple est la loi en puissance :

$$\frac{\mu(T)}{\mu_0} \simeq \left(\frac{T}{T_0}\right)^n$$

où $T_0 = 273,15 \text{ K}$ et $\mu_0 = \mu(T_0) = 1,711 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$. Une autre loi couramment utilisée pour les gaz parfaits est la loi de Sutherland définie par :

$$\frac{\mu(T)}{\mu_0} \simeq \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2} \frac{T_0 + S}{T + S}$$

avec $S = 110,4 \text{ K}$ la température de Sutherland. Cette loi est valable pour des températures comprises entre 0 et 550 K avec une précision inférieure à 10%. Comme toutes les lois, ces relations ne sont valables que pour certains fluides dans certaines conditions. La rhéologie est la science qui étudie le comportement des fluides. Elle classe les fluides en fonction de leurs caractéristiques et propose, entre autres, des lois d'évolution de la viscosité.

2.2 Compressibilité

Une propriété très importante des fluides est leur compressibilité. Considérons un volume de fluide V contenant un nombre n fixé de molécules. Ce volume varie en fonction de la pression p et de la température T . Soit un volume $V(T,p)$, sa variation dV s'écrit de façon différentielle :

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT$$

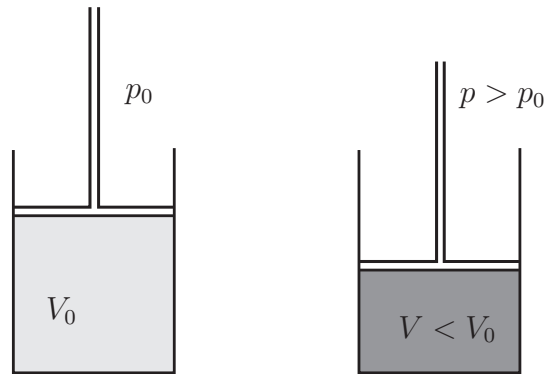


FIGURE 1.7 : Dans le cas d'un fluide compressible, l'augmentation de la pression réduit le volume du gaz. On néglige ici l'augmentation de température associée à cette compression.

On définit alors la compressibilité isotherme κ_T et le coefficient de dilatation thermique β par :

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$$

$$\beta = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

qui sont toutes les deux des quantités positives caractéristiques du fluide étudié. Pour obtenir les variations de la masse volumique, on considère que le produit ρV qui représente la masse de fluide contenu dans le volume est constant, d'où $\rho dV + V d\rho = 0$. On a alors :

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V} = \kappa_T dp - \beta dT$$

Dans l'ensemble des cas étudiés dans cet ouvrage, on considère que la mécanique des fluides et les transferts thermiques sont découplés, c'est-à-dire que le coefficient d'expansion thermique est nul ($\beta \sim 0$) et que les variations de masse volumique sont uniquement dues à la pression. Autrement dit, la compressibilité isotherme rend compte de la compressibilité du fluide : si κ_T est petit, le fluide est incompressible ; si κ_T est grand, le fluide est compressible. La section 3 montre que l'on s'intéresse plus à la compressibilité de l'écoulement qu'à la compressibilité du fluide.

Exemple

En appliquant une pression sur une quantité donnée d'air, son volume diminue (Figure 1.7). Pour quantifier cette diminution, on a $\kappa_T(\text{air}) = 10^{-4} \text{ bar}^{-1}$. Une faible élévation de la pression permet de réduire significativement un volume d'air. Il est important de parler de compression isotherme car la compression d'un fluide compressible réduit le volume