Chapitre 1

Logique mathématique

Les énoncés logiques dont il est question dans ce paragraphe sont à prendre au sens naïf. Ce sens se précisera et s'enrichira à mesure de l'avancement du lecteur dans l'étude de ce cours.

1.1 Condition nécessaire et condition suffisante

Soient E et F des énoncés logiques. Supposons **vraie** l'implication :

$$E \Rightarrow F$$

Ceci signifie (du point de vue pratique) que si E est vrai alors F est vrai. Donc pour que E soit vrai **il faut** que F soit vrai, et pour que F soit vrai il **suffit** que E soit vrai. On dit que

- la condition "F est vrai" est une **condition nécessaire** pour que E soit vrai.
- la condition "E est vrai" est une **condition suffisante** pour que F soit vrai.

ATTENTION ! Une implication entre E et F ne signifie pas une relation de cause à effet, ce n'est qu'un lien logique.

1.2 Implication et équivalence

Soient E et F des énoncés logiques, l'implication directe $E \Rightarrow F$ a pour réciproque $F \Rightarrow E$. Il se peut que l'une des implications soit vraie et l'autre fausse. Si les implications $E \Rightarrow F$ et $F \Rightarrow E$ sont toutes deux vraies on écrit $E \Leftrightarrow F$ et on dit que les énoncés E et F sont **équivalents**.

Donnons deux exemples : soit n un entier quelconque.

1. L'implication (n est divisible par 10)$\Rightarrow$ (n est divisible par 2) est vraie mais sa réciproque est fausse car un nombre pair n'est pas nécessairement divisible par 10.
2. L'équivalence (n est divisible par 3)$\Leftrightarrow$ (la somme des chiffres de n est divisible par 3) est vraie.

1.3 Connecteurs $\boxed{\text{et}}$ $\boxed{\text{ou}}$

Proposition 1.3.1. *Soient A, B et I trois points. On note $[AB]$ le segment d'extrémités A et B. On a*

$$(I \text{ est milieu de } [AB]) \Leftrightarrow (IA = IB \ \text{ et } \ I \in [AB])$$

Proposition 1.3.2. *Soient a et b deux nombres. On a*

$$(a \times b = 0) \Leftrightarrow (a = 0 \ \text{ ou } \ b = 0)$$

Définition 1.3.3. *Soient a et b deux nombres. La relation $a \leq b$ signifie $a < b$ ou $a = b$.*

1.4 Négation

Si E est un énoncé, on désigne par : non E sa négation. L'énoncé non E est vrai si E est faux. L'énoncé non E est faux si E est vrai.

Il y a des abréviations, par exemple la négation de $=$ est notée $\neq$

Proposition 1.4.1. *Soient a et b deux nombres. On a*

$$(a \times b \neq 0) \Leftrightarrow (a \neq 0 \ \text{ et } \ b \neq 0)$$

Chapitre 2

Théorie des ensembles

Les mots ensemble, élément, les relations d'appartenance ($\in$) ou d'égalité ($=$) etc. sont à prendre au sens naïf, lequel est suffisant pour que le lecteur comprenne le contenu de ce cours.

Définition 2.0.2. *Soient A et B des ensembles. On désigne par $A \cap B$ l'ensemble des éléments x tels que*

$$x \in A \quad \text{et} \quad x \in B$$

L'ensemble $A \cap B$ est appelé **intersection** *de A et B.*

Définition 2.0.3. *Soient A et B des ensembles. On désigne par $A \cup B$ l'ensemble des éléments x tels que*

$$x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B$$

L'ensemble $A \cup B$ est appelé **réunion** *de A et B.*

Définition 2.0.4. *Soient A et B des ensembles. On désigne par $A \setminus B$ l'ensemble des éléments x tels que*

$$x \in A \quad \text{et} \quad x \notin B$$

L'ensemble $A \setminus B$ est appelé **complémentaire** *de B dans A.*

Définition 2.0.5. *Soient A et B des ensembles. On dit que A est inclus dans B et on écrit $A \subset B$ si tout élément de A est élément de B. On a donc :*

$$(A \subset B) \Leftrightarrow \forall x \ (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

où le symbole $\forall x$ se lit "pour tout x".

Proposition 2.0.6. *Soient A et B des ensembles. On a*

$$A \not\subset B \Leftrightarrow (\exists x \ (x \in A \text{ et } x \notin B))$$

où le symbole $\exists x$ se lit "il existe x", c'est-à-dire, "il existe au moins un x".

Définition 2.0.7. *Deux ensembles A et B sont dits égaux s'ils ont les mêmes éléments.*

Proposition 2.0.8. *Soient A et B des ensembles. On a*

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ et } B \subset A)$$

Axiome 2.0.9. *Il existe un ensemble qui n'a aucun élément. On l'appelle l'ensemble vide. On le note $\emptyset$. On a donc :*

$$\forall x, \ x \notin \emptyset$$

Définition 2.0.10. *Soient A et B des ensembles. On dit qu'ils sont* **disjoints** *s'ils n'ont aucun élément commun, ce qui équivaut à :*

$$A \cap B = \emptyset$$

Définition 2.0.11. *Soient A et B des ensembles (non vides). Une* **application** *f de A dans B associe* **à tout élément** *$a \in A$ un élément* **unique** *dans B ; cet élément est noté $f(a)$, on l'appelle* **l'image** *de a par f. On représente généralement une application par le schéma suivant :*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ a & \mapsto & f(a) \end{array}$$

On dit que A est l'ensemble de départ de f et que B est l'ensemble d'arrivée de f. On dit aussi que f va de A dans B. Si $f(a) = b$ on dit que a est **un antécédant** de b par f.

Chapitre 3

Algèbre

3.1 Ensembles de nombres

Définition 3.1.1. *On note* $\mathbb{N}$ *l'ensemble des* **entiers naturels**

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Définition 3.1.2. *On note* $\mathbb{Z}$ *l'ensemble des* **entiers relatifs**

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

L'ensemble $\mathbb{Z}$ est la réunion de $\mathbb{N}$ et de tous les entiers négatifs.

Définition 3.1.3. *On note* $\mathbb{Q}$ *l'ensemble des* **nombres rationnels**. *Ce sont les entiers et les quotients d'entiers.*

Comme un entier est aussi un quotient d'entiers (écrire $a = \dfrac{a}{1}$), on voit qu'on a :

$$x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{Z},\ \exists b \in \mathbb{N}^*,\ x = \frac{a}{b}$$

Lorsque l'on divise deux entiers l'un par l'autre, il y a trois possibilités :

1. la division tombe juste et le quotient est donc entier.
2. la division ne tombe pas juste, mais si on la poursuit au-delà de la virgule, elle finit par tomber juste.
3. la division ne tombe pas juste et, même si on la poursuit au-delà de la virgule, elle ne s'arrête pas car on n'obtient jamais un reste nul. En ce cas, il y a une infinité de chiffres non nuls après la virgule.

Exemples :

$$\begin{aligned}
\frac{12}{4} &= 3 = 3,0000... \\
\frac{13}{4} &= 3,25 = 3,250000... \\
\frac{1}{3} &= 0,3333... \\
\frac{22}{7} &= 3,142857142857.....
\end{aligned}$$

Plus généralement, on appelle **nombre réel**, tout nombre donné par une écriture décimale illimitée, éventuellement précédée du signe moins, cette écriture pouvant se terminer par une infinité de 0 répétés. On a la notion de réel positif et de réel négatif. On montre que l'on peut ajouter et multiplier entre eux des réels et que le résultat est réel.

Définition 3.1.4. *On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.*

On a les inclusions : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

On montre que l'écriture décimale d'un rationnel est toujours périodique, c'est-à-dire que les chiffres situés après la virgule se répètent. Ainsi

$$\frac{269}{330} = 0,8151515...$$

En fait, la périodicité de l'écriture décimale caractérise les nombres rationnels parmi les réels car on montre, réciproquement, que tout réel ayant une écriture décimale qui est périodique est rationnel. Ainsi

$$0,151515... = \frac{15}{99} = \frac{5}{33}$$

Donc les nombres réels qui ont une écriture décimale qui n'est pas périodique ne sont pas rationnels. On dit qu'ils sont **irrationnels**. Ainsi le nombre réel a, défini par :

$$a = 0,12112111211112...$$

est irrationnel. On peut écrire $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

3.2 Addition et soustraction

Proposition 3.2.1. *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'équation*

$$a + x = 0$$

admet une solution unique x. Ce réel x est appelé **opposé** *de a. On le note : $-a$.*

Proposition 3.2.2 (Le signe "$-$" devant une parenthèse)**.** *Pour tous réels a et b on a*

$$\begin{aligned} -(a+b) &= -a-b \\ -(a-b) &= -a+b \\ -(-a-b) &= a+b \end{aligned}$$

Définition 3.2.3. *Pour tous réels a et b on dit que a* **est inférieur à** *b et on écrit $a \leq b$ si le réel $b-a$ est positif ou nul.*

Proposition 3.2.4. *Soient a, b, a', b' des réels on a*

$$a \leq b \text{ et } a' \leq b' \Rightarrow a + a' \leq b + b'$$

ATTENTION ! On ne peut pas[1] **retrancher** entre elles des inégalités de même sens.

1. Dans toutes les mises en garde de ce cours, il faut comprendre qu'une règle, comportant certains paramètres variant *a priori* dans un certain ensemble, est **fausse** si elle n'est pas vraie pour **toutes** les valeurs possibles de ces paramètres pris dans cet ensemble.

3.3 Multiplication et division

Proposition 3.3.1 (Associativité)**.** *Pour tous réels a, b et c on a*

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$

et on note simplement : abc la valeur commune des deux expressions.

ATTENTION ! $a(bc) \neq ab \times ac$.

Proposition 3.3.2 (Distributivité)**.** *Pour tous réels a, b et c on a*

$$\begin{aligned} a \times (b + c) &= (a \times b) + (a \times c) \\ a \times (b - c) &= (a \times b) - (a \times c) \end{aligned}$$

Proposition 3.3.3 (Identités remarquables)**.** *Pour tous réels a et b on a*

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + b^2 + 2ab \\ (a-b)^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

ATTENTION ! $(a-b)^2 \neq a^2 - b^2$

Proposition 3.3.4. *Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, l'équation*

$$a \times x = 1$$

admet une solution unique x. Ce réel x est appelé **inverse** *de a. On le note* $\dfrac{1}{a}$

ATTENTION ! Ne pas confondre inverse $\frac{1}{a}$ et opposé $-a$. L'opposé de 0 est 0 mais

le nombre 0 **n'a pas d'inverse**

Définition 3.3.5. *Soient a et b des réels. On suppose $b \neq 0$. On pose*

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$$

Proposition 3.3.6. *Soient a, b et c des réels tels que $b, c \neq 0$. On a*

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$$

ATTENTION ! Ne pas confondre $\dfrac{ac}{bc}$ et $\dfrac{a+c}{b+c}$. Le premier quotient se simplifie mais pas le second.

Proposition 3.3.7. *Soient a, b, c et d des réels. Si tous les quotients existent on a*

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{c}{b} &= \frac{a+c}{b} \\ \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} &= \frac{ac}{bd} \\ \frac{a}{b} \times c &= \frac{ac}{b} \\ \frac{1}{\frac{a}{b}} &= \frac{b}{a} \end{aligned}$$

Proposition 3.3.8. *Soient a, b, a', b' et c des réels on a*

$$
\begin{aligned}
a \leq b \text{ et } c \geq 0 &\Rightarrow ac \leq bc && (1)\\
a \leq b \text{ et } c \leq 0 &\Rightarrow ac \geq bc && (2)\\
0 \leq a \leq b \text{ et } 0 \leq a' \leq b' &\Rightarrow aa' \leq bb' && (3)\\
0 < a \leq b &\Rightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} && (4)
\end{aligned}
$$

ATTENTION ! On ne peut pas **diviser** entre elles des inégalités de même sens.

Théorème 3.3.9 (Les deux principes fondamentaux de l'Algèbre élémentaire). *Soient a, b, c, d, x des réels, tels que $a \neq 0$. On a les équivalences :*

$$
\boxed{
\begin{aligned}
c + x = d &\Leftrightarrow x = d - c\\
a \times x = b &\Leftrightarrow x = \frac{b}{a}
\end{aligned}
}
$$

Ces deux équivalences permettent de calculer x dans une équation du premier degré. Dans la première, on dit qu'on **fait passer** le terme c dans l'autre membre. Dans la deuxième, on **divise** par a les deux membres.

ATTENTION ! Bien noter la différence : faire passer $\neq$ diviser

Donnons un exemple élémentaire, montrant comment on utilise ces règles. Considérons le nombre

$$a = 0,8151515...$$

Cette écriture décimale est périodique donc $a \in \mathbb{Q}$. Cherchons l'écriture rationnelle de a. On écrit :

$$10a = 8,151515... = 8 + b$$

en posant $b = 0,151515....$ On a $100b = 15,151515...$ donc

$$
\begin{aligned}
100b &= 15 + b\\
99b &= 15\\
b &= \frac{15}{99} = \frac{5}{33}
\end{aligned}
$$

On reporte et on obtient :

$$10a = 8 + \frac{5}{33} = \frac{269}{33}$$

d'où

$$a = \frac{269}{330}$$

3.4 Puissances d'exposant entier

Proposition 3.4.1. *Soient u et v des nombres réels $\neq 0$ et α, β des* **entiers** *de signes quelconques. On a :*