

Chapitre premier

INTRODUCTION

Ce chapitre est essentiellement consacré à la définition des notions que nous allons étudier par la suite. Qu'est-ce qu'un système d'équations différentielles ordinaires, qu'entend-on par solution d'un tel système et combien existe-t-il de solutions? Telles sont les principales questions auxquelles nous répondons dans ce chapitre. Le nombre de solutions est déterminé par les théorèmes d'existence et d'unicité que nous nous contentons de formuler ici sans en donner la démonstration.

Nous donnerons cette démonstration, ainsi que celle d'autres théorèmes analogues au chapitre IV; jusque-là les théorèmes formulés au chapitre premier seront maintes fois utilisés, ce qui permettra d'en découvrir l'importance. Outre ces notions essentielles on considère dans ce chapitre les méthodes de résolution des équations différentielles les plus simples. A la fin du chapitre on étudie les équations différentielles complexes et leurs solutions complexes et l'on envisage les notions premières concernant les systèmes d'équations différentielles linéaires.

§ 1. ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU PREMIER ORDRE

On appelle *équations différentielles* les équations dont les inconnues sont des fonctions d'une ou de plusieurs variables, ces équations comportant non seulement les fonctions elles-mêmes, mais aussi leurs dérivées. Si les fonctions inconnues dépendent de plusieurs variables, les équations sont dites aux *dérivées partielles*; dans le cas contraire, c'est-à-dire quand on considère des fonctions d'une seule variable indépendante, les équations sont appelées équations différentielles *ordinaires*. Dans ce qui suit nous ne nous occuperons que de ces dernières.

Étant donné que dans de nombreuses applications physiques la variable indépendante dont dépendent les fonctions inconnues est le temps qu'il est admis de désigner par la lettre t , nous emploierons partout cette notation. Les fonctions inconnues seront notées x , y , z , etc. En règle générale, nous noterons les dérivées par rapport à t par des points: $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$, etc. Quand cette représentation est incommode ou impossible, nous désignerons

l'ordre de la dérivée par un indice supérieur entre parenthèses; par exemple, $x^{(n)} = \frac{d^n x}{dt^n}$.

Nous entreprendrons tout d'abord l'étude d'une *équation différentielle du premier ordre*, c'est-à-dire d'une équation dans laquelle n'entre que la dérivée première de la fonction inconnue. Une équation de ce genre peut être mise sous la forme :

$$F(t, x, \dot{x}) = 0. \quad (1)$$

Ici t désigne la variable indépendante, x la fonction inconnue, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ sa dérivée et F une fonction donnée de ces trois variables.

La fonction F peut ne pas être définie pour toutes les valeurs des variables indépendantes; c'est pourquoi on introduit la notion de *domaine de définition* B de la fonction F . On a ici en vue un ensemble de points de l'espace des coordonnées $t, x, \dot{x}$. On appelle *solution* de l'équation (1) une fonction $x = \varphi(t)$ de la variable indépendante t , définie sur un intervalle $r_1 < t < r_2$ (les cas $r_1 = -\infty$, $r_2 = +\infty$ ne sont pas exclus), telle qu'en la substituant à x dans la relation (1) nous obtenons une identité en tous points de l'intervalle $r_1 < t < r_2$. L'intervalle $r_1 < t < r_2$ est appelé *intervalle de définition* de la solution $\varphi(t)$. Il est évident que la substitution $x = \varphi(t)$ dans la relation (1) n'est possible que si la fonction $\varphi(t)$ possède une dérivée première (et en particulier est continue) sur tout l'intervalle $r_1 < t < r_2$. Pour qu'il soit possible d'effectuer la substitution $x = \varphi(t)$ dans la relation (1) il est indispensable également que le point de coordonnées $(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t))$ appartienne à l'ensemble B sur lequel la fonction F est définie pour une valeur arbitraire de t prise dans l'intervalle $r_1 < t < r_2$.

La relation (1) relie les trois variables $t, x, \dot{x}$. Dans certains cas elle détermine la variable $\dot{x}$ en tant que fonction univoque implicite des variables indépendantes t, x . Dans ce cas l'équation différentielle (1) est équivalente à une équation différentielle de la forme

$$\dot{x} = f(t, x). \quad (2)$$

On dit alors que l'équation (2) est *résolue par rapport à la dérivée*; dans une certaine mesure elle se prête mieux à l'étude que l'équation différentielle générale (1). Ce sont précisément les équations résolues par rapport à la dérivée que nous allons considérer. Nous n'estimerons plus que la relation (2) a été obtenue en résolvant l'équation (1) par rapport à $\dot{x}$, mais nous partirons du fait que la fonction $f(t, x)$ est une fonction donnée de deux variables indépendantes.

Afin de pouvoir utiliser les représentations géométriques concrètes nous introduirons le plan P des coordonnées t et x . Nous porterons les valeurs de la variable indépendante t sur l'axe des abscisses et les valeurs de la variable x fonction de t sur l'axe des ordonnées. La fonction f déterminant l'équation différentielle (2) peut ne pas être donnée pour toutes les valeurs de t et x , ou, géométriquement parlant, ne pas être donnée pour tous les points du plan P , mais seulement pour les points d'un certain ensemble Γ du plan P (fig. 1). Nous supposons que l'ensemble Γ

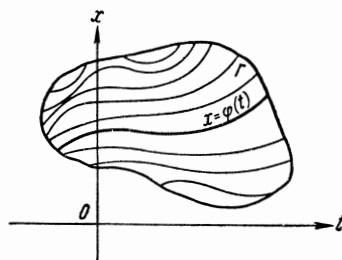


Fig. 1

est un *ouvert*. Cela signifie qu'avec chaque point p de Γ appartient à cet ensemble un cercle de centre p et de rayon positif (cf. § 32). En ce qui concerne f nous supposons que f et sa dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ sont des fonctions continues du couple de variables t et x dans l'ensemble Γ tout entier. La solution $x = \varphi(t)$ de l'équation (2) sera représentée géométriquement dans le plan P sous forme d'une courbe d'équation $x = \varphi(t)$. Cette courbe possède une tangente en chaque point et passe entièrement dans l'ouvert Γ ; elle est appelée *courbe intégrale* de l'équation différentielle (2).

Théorème d'existence et d'unicité

On sait le rôle important que jouent en algèbre les théorèmes établissant le nombre de solutions que possède un système d'équations algébriques. Tel est, par exemple, le *théorème fondamental de l'algèbre* établissant qu'un polynôme de degré n a toujours exactement n racines (en tenant compte de leur multiplicité). De même en théorie des équations différentielles une question théorique importante est de savoir combien de solutions possède une équation différentielle donnée. Il s'avère que chaque équation différentielle possède un ensemble infini de solutions, de sorte que ce qui nous intéresse, ce n'est plus le nombre de solutions, mais la

manière de décrire l'ensemble de toutes les solutions d'une équation différentielle donnée. La réponse à cette question est fournie par le *théorème d'existence et d'unicité* (théorème 1) que dans ce paragraphe nous citerons sans démontrer. La démonstration sera donnée beaucoup plus loin (cf. § 20).

Théorème 1. Soit

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (3)$$

une équation différentielle. Nous supposons que la fonction $f(t, x)$ est donnée dans un certain ouvert Γ du plan P des variables t, x et que la fonction f et sa dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ sont des fonctions continues dans tout l'ouvert Γ . Le théorème établit que

1) pour chaque point (t_0, x_0) de l'ouvert Γ il existe une solution $x = \varphi(t)$ de l'équation (3) satisfaisant à la condition :

$$\varphi(t_0) = x_0; \quad (4)$$

2) si deux solutions $x = \psi(t)$ et $x = \chi(t)$ de l'équation (3) coïncident pour une valeur $t = t_0$ au moins, autrement dit si

$$\varphi(t_0) = \chi(t_0),$$

ces deux solutions seront identiques pour toutes les valeurs de la variable t pour lesquelles elles sont toutes deux déterminées.

Les nombres t_0, x_0 sont appelés les *valeurs initiales* pour la solution $x = \varphi(t)$ et la relation (4) la *condition initiale* pour cette solution. On dit également que la solution $x = \varphi(t)$ *satisfait à la condition initiale* (4) ou qu'elle possède les *valeurs initiales* t_0, x_0 . L'affirmation que la solution $x = \varphi(t)$ satisfait à la condition initiale (4) (ou possède les valeurs initiales t_0, x_0) implique que l'intervalle $r_1 < t < r_2$ de définition des solutions $x = \varphi(t)$ contient le point t_0 .

Ainsi, le théorème 1 affirme que les coordonnées de tout point (t_0, x_0) de l'ouvert Γ sont les valeurs initiales pour une certaine solution de l'équation (3) et que deux solutions pour les conditions initiales communes coïncident.

Le contenu géométrique du théorème 1 réside dans le fait que *par chaque point (t_0, x_0) de l'ouvert Γ passe une et une seule courbe intégrale de l'équation (3)* (cf. fig. 1).

Quand nous disons que par chaque point (t_0, x_0) de l'ensemble Γ passe «une seule» courbe intégrale, nous faisons une certaine faute de rigueur. En effet, on appelle solution de l'équation (3) une fonction $x = \varphi(t)$ donnée sur un intervalle bien déterminé $r_1 < t < r_2$. Il peut exister, outre cette fonction, une fonction $x = \psi(t)$, vérifiant également l'équation (3) et possédant les mêmes valeurs initiales t_0, x_0 , mais donnée sur un autre intervalle $s_1 < t < s_2$. La

seconde partie du théorème 1 n'affirme que les fonctions $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ coïncident là où elles sont toutes deux définies, mais non pas que leurs intervalles de définition $r_1 < t < r_2$ et $s_1 < t < s_2$ sont identiques.

Si l'un des intervalles, par exemple $s_1 < t < s_2$, contient entièrement l'autre, nous dirons que la solution $x = \psi(t)$ donnée sur l'intervalle $s_1 < t < s_2$ est le *prolongement* de la solution $x = \varphi(t)$. Il est naturel de concentrer toute l'attention sur les solutions que l'on ne peut prolonger ni à droite ni à gauche. Nous les appellerons solutions *non prolongeables*. On démontre aisément (ce que

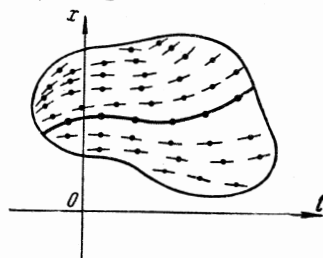


Fig. 2

nous ferons plus loin dans le § 22) que chaque solution peut être prolongée jusqu'à une solution non prolongeable et cela d'une manière unique. Si l'on entend maintenant par courbe intégrale le graphe d'une solution non prolongeable, notre affirmation selon laquelle par chaque point (t_0, x_0) passe une seule courbe intégrale deviendra exacte.

Nous avons représenté chaque solution $x = \varphi(t)$ de l'équation (3) sous forme du graphe de la fonction $\varphi(t)$. Donnons maintenant l'interprétation géométrique de l'équation (3) elle-même. Menons par chaque point (t, x) de l'ouvert Γ une droite $l_{t,x}$ de coefficient angulaire $f(t, x)$. Nous obtenons un *champ de directions* correspondant à l'équation (3), ce qui constitue l'interprétation géométrique de cette équation.

La liaison entre la représentation géométrique de l'équation et celle de ses solutions tient à ce que *chaque courbe intégrale* $x = \varphi(t)$ est tangente en chacun de ses points $(t, \varphi(t))$ à la droite $l_{t, \varphi(t)}$ (fig. 2).

Exemples

1. Pour illustrer l'importance du théorème 1 (dans le cas présent de sa deuxième partie) résolvons l'équation différentielle

$$x = \alpha x, \quad (5)$$

où α est un nombre réel. Ici

$$f(t, x) = \alpha x,$$

de sorte que la fonction f ne dépend en réalité que d'une seule variable x . L'ensemble de points sur lequel est définie la fonction f coïncide ici avec le plan P tout entier. La fonction $f(t, x) = \alpha x$ de même que sa dérivée $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x} = \alpha$ sont des fonctions continues des variables t et x sur tout le plan P . On peut donc appliquer le théorème 1 à l'équation (5). On vérifie par substitution directe dans l'équation (5) que toute fonction

$$x = ce^{\alpha t}, \quad (6)$$

où c est un nombre réel arbitraire, est une solution de l'équation (5). Cette solution est non prolongeable puisqu'elle est donnée sur toute la droite $-\infty < t < \infty$. Montrons qu'en donnant toutes les valeurs possibles au nombre c , nous obtiendrons toutes les solutions de l'équation (5). Soit $x = \varphi(t)$ une solution arbitraire de cette équation. Montrons qu'en choisissant adéquatement le nombre c nous aurons $\varphi(t) = ce^{\alpha t}$. Soit t_0 un certain point de l'intervalle d'existence de la solution $\varphi(t)$ et $x_0 = \varphi(t_0)$. Posons $c = x_0 e^{-\alpha t_0}$. Dans ce cas les solutions $x = \varphi(t)$ et $x = ce^{\alpha t} = x_0 e^{\alpha(t-t_0)}$ de l'équation (5) possèdent des valeurs initiales identiques (t_0, x_0) et, par conséquent, en vertu de la seconde partie du théorème 1, coïncident. Ainsi, la formule (6) épuise l'ensemble de toutes les solutions de l'équation différentielle (5).

2. Donnons une description mathématique du processus de désintégration de la matière radioactive. Désignons par $x(t)$ la quantité de matière non désintégrée à l'instant t . Il découle de considérations physiques que (si des conditions ne sont pas réalisées pour une réaction en chaîne) la vitesse de désintégration, c'est-à-dire la dérivée $x(t)$, est proportionnelle à la quantité de matière radioactive non encore désintégrée :

$$x'(t) = -\beta x(t).$$

Ici β est un coefficient constant positif de proportionnalité, qui dépend des propriétés de la matière radioactive, et le signe moins dans le second membre signifie que $x(t)$ décroît. Nous voyons que la fonction $x(t)$ vérifie l'équation différentielle élémentaire que nous avons considérée dans l'exemple 1, de sorte que

$$x(t) = ce^{-\beta t}.$$

Pour déterminer la constante c , il suffit de préciser les valeurs initiales. Si l'on sait par exemple qu'à l'instant $t=0$ la quantité

de matière était égale à x_0 , nous aurons $c = x_0$ et

$$x(t) = x_0 e^{-\beta t}.$$

La vitesse de désintégration s'exprime ici par la grandeur β de dimension 1/s. On la caractérise souvent non pas par β , mais par une grandeur appelée *période*, qui exprime le temps nécessaire pour que se désintègre la moitié de la quantité de matière. Désignons la période par T et établissons la liaison entre les grandeurs β et T . Nous avons :

$$\frac{x_0}{2} = x_0 e^{-\beta T},$$

d'où

$$T = \frac{1}{\beta} \ln 2.$$

§ 2. QUELQUES MÉTHODES ÉLÉMENTAIRES D'INTÉGRATION

Le problème principal qui nous préoccupe quand nous avons affaire à une équation différentielle est la recherche de ses solutions. En théorie des équations différentielles comme en algèbre on peut interpréter de différentes manières ce que l'on entend par la recherche de la solution de l'équation. En algèbre on s'est tout d'abord efforcé de trouver une formule générale, en utilisant les radicaux, pour la résolution des équations de chaque degré. Telles étaient les formules pour résoudre les équations du second degré, la formule de Cardan pour résoudre les équations du troisième degré et la formule de Ferrari pour les équations du quatrième degré. Il fut établi par la suite que pour les équations de degré supérieur au quatrième il n'existe pas de formule générale de résolution en radicaux. Il subsistait la possibilité de rechercher la solution approchée des équations à coefficients numériques, ainsi que celle d'étudier la dépendance des racines des équations par rapport à leurs coefficients. Telle fut approximativement l'évolution suivie par la notion de solution en théorie des équations différentielles. On s'est efforcé tout d'abord de résoudre ou, comme il est admis de dire, « d'intégrer les équations différentielles par quadratures », c'est-à-dire que l'on s'efforçait d'écrire la solution à l'aide des fonctions élémentaires et de leurs intégrales. Plus tard, quand il s'avéra que la solution n'existe dans ce sens que pour un très petit nombre de types d'équations, le centre de gravité de la théorie se déplaça vers l'étude des lois générales du comportement des solutions. Dans ce paragraphe nous exposerons les méthodes d'intégration par quadratures de certaines équations du premier ordre.

A) (*Equation aux différentielles totales*). Résolvons l'équation

$$\dot{x} = \frac{g(t, x)}{h(t, x)} \quad (1)$$

dont le second membre se présente sous la forme du rapport des fonctions $g(t, x)$ et $h(t, x)$. Supposons que les fonctions $g(t, x)$ et $h(t, x)$ sont définies et continues sur un ensemble ouvert Γ du plan P des coordonnées t, x , que le dénominateur $h(t, x)$ ne s'annule en aucun point de cet ouvert et l'expression $h(t, x)dx - g(t, x)dt$ est une différentielle totale sur tout l'ouvert Γ . La dernière propriété signifie qu'il existe une fonction $F(t, x)$ définie sur l'ouvert Γ et satisfaisant partout aux conditions

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = h(t, x), \quad \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = -g(t, x). \quad (2)$$

Nous conviendrons d'écrire (1) sous la forme de l'équation

$$h(t, x)dx - g(t, x)dt = 0,$$

dont le membre de gauche est une différentielle totale. Il s'avère que pour chaque solution $x = \varphi(t)$ de l'équation (1) l'identité

$$F(t, \varphi(t)) = \text{const}$$

est vérifiée. Réciproquement, chaque fonction $x = \varphi(t)$ définie sur un intervalle quelconque et obtenue comme fonction implicite à partir de l'équation

$$F(t, x) = c \quad (3)$$

(avec une constante c arbitraire) est une solution de l'équation différentielle (1).

Démontrons la proposition A). Soit $x = \varphi(t)$ une solution de l'équation différentielle (1), définie sur l'intervalle $r_1 < t < r_2$. Nous avons alors pour tous les points de l'intervalle :

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{g(t, \varphi(t))}{h(t, \varphi(t))},$$

d'où

$$h(t, \varphi(t))\dot{\varphi}(t) - g(t, \varphi(t)) = 0.$$

En vertu de (2) le membre de gauche est la dérivée totale par rapport à t de la fonction $F(t, \varphi(t))$ de telle sorte que

$$\frac{d}{dt} F(t, \varphi(t)) = 0$$

sur tout l'intervalle $r_1 < t < r_2$. En vertu du théorème d'analyse bien connu, la fonction $F(t, \varphi(t))$ est constante sur tout l'intervalle.