Introduction

Cours donné à l'Université de Mascara en décembre 2005

Il existe de nombreux ouvrages, dont certains sont devenus incontournables, qui traitent de la théorie des groupes et algèbres de Lie, leurs représentations et leurs applications. Aujourd'hui il n'est plus nécessaire d'expliquer l'intérêt que suscitent ces objets, puisqu'ils apparaissent, de manière plus ou moins flagrante, dans de nombreux domaines tels que la géométrie différentielle, l'analyse sur les variétés, la géométrie algébrique, la géométrie arithmétique, la théorie des nombres, la géométrie non-commutative, les systèmes dynamiques, la topologie, les équations différentielles, les probabilités, la physique, ... Et la liste est loin d'être exhaustive.

Dans ce contexte, ces notes n'ont rien de révolutionnaires, en ce sens qu'elles n'apportent rien, ni sur le fond ni sur la forme, qui ne soit déjà connu des experts. Il s'agit d'une introduction élémentaire et classique à la structure des algèbres de Lie de dimension finie. Ces notes s'adressent donc en premier lieu aux étudiants de troisième cycle, et aux chercheurs qui souhaiteraient avoir une connaissance plus précise des algèbres de Lie.

Nous avons choisi d'entrer directement dans le vif du sujet, sans détours historiques ni subtilités réthoriques. Les définitions sont systématiquement accompagnées d'exemples et les démonstrations des théorèmes sont rédigées dans le souci constant de les rendre accessibles au lecteur. Il convient de noter que les preuves proposées sont standard et se trouvent dans la majorité des ouvrages sur le sujet. De plus, pour le lecteur débutant, la plupart des exemples nécessiteront une vérification qui sera, nous l'espérons, un exercice utile. Enfin, nous proposons également un plan d'étude au lecteur désireux de poursuivre son aventure dans le vaste monde des groupes de Lie.

La principale source d'inspiration de ces notes est l'excellent ouvrage d'Anthony Knapp, *Lie Groups, beyond an introduction*, dont nous reprenons la plupart des preuves. Il va sans dire que l'auteur est conscient que le choix des références bibliographiques est nécessairement restrictif et subjectif. De nombreux autres ouvrages et cours sur le sujet mériteraient autant, si ce n'est plus, d'attention. Je prie leurs auteurs de me pardonner ce silence, il est le fruit de ma seule ignorance.

Chapitre I : Définitions et exemples

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ est un corps arbitraire, en particulier sa caractéristique n'est pas nécessairement nulle et il n'est pas nécessairement algébriquement clos. De plus, les espaces vectoriels que nous considérons seront, sauf mention du contraire, de dimension finie sur $\mathbb{K}$.

I.1 Algèbres de Lie

Définition I.1.1. Une *algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ de dimension n sur $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ muni d'une application bilinéaire $[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, appelée *crochet de Lie*, qui possède les propriétés :

(i) $[X, X] = 0$, pour tout $X \in \mathfrak{g}$ (*antisymétrie*),

(ii) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$, pour tous X, Y et Z dans $\mathfrak{g}$ (*identité de Jacobi*).

Exemple I.1.2. Tout espace vectoriel V sur $\mathbb{K}$ muni du crochet $[X, Y] = 0$, $X, Y \in V$, est une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$.

Exemple I.1.3. Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. L'algèbre $\mathfrak{gl}(V)$ des endomorphismes de V munie du crochet $[A, B] = A \circ B - B \circ A$, est une algèbre de Lie de dimension $\dim(V)^2$ sur $\mathbb{K}$. Par exemple si $V = \mathbb{C}^n$ (resp. $V = \mathbb{R}^n$, $V = \mathbb{H}^n$), alors $\mathfrak{gl}(V)$ est l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ (resp. $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{H})$) des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes (resp. réels, quaternioniques). Le crochet de Lie sur $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ (resp. $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{H})$) est alors défini par le produit matriciel : $[A, B] = AB - BA$.

Remarque I.1.4 *On rappelle que tout quaternion s'écrit sous la forme $a + ib + jc + kd$, où a, b, c et d sont des nombres réels, avec $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$, $ki = j$, $jk = i$, $ji = -k$, $kj = -i$ et $ik = -j$. Le conjugué du quaternion $x = a + ib + jc + kd$ est le quaternion $\overline{q} = a - ib - jc - kd$. En particulier, $q = -\overline{q} \Leftrightarrow a = 0$, et on définit la partie réelle de q par $Re(q) = a$. Un quaternion dont la partie réelle est nulle est appelé un quaternion pur. Notons que $Re(q_1q_2) = Re(q_2q_1)$ et $Re(q_1\overline{q_2}) = Re(q_2\overline{q_1})$ pour tous q_1 et q_2 dans $\mathbb{H}$.*

Exemple I.1.5. L'algèbre de Lie Aff($\mathbb{R}$) des transformations affines de la droite réelle est l'espace vectoriel réel de dimension 2 engendré par les matrices $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ muni du crochet $[X, Y] = Y$.

Exemple I.1.6. Soient R_x, R_y et R_z les "rotations infinitésimales" de $\mathbb{R}^3$ autour des axes x, y et z respectivement, i.e

$R_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $R_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $R_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. En utilisant le crochet défini par le produit matriciel, on vérifie que $[R_x, R_y] = R_z$, $[R_y, R_z] = R_x$ et $[R_z, R_x] = R_y$. Ainsi l'espace vectoriel réel de dimension 3 engendré par les trois matrices R_x, R_y et R_z est une algèbre de Lie réelle de dimension 3, appelée l'algèbre de Lie des "rotations infinitésimales" de l'espace, et notée $\mathfrak{o}(3)$.

Exemple I.1.7. Les éléments $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ engendrent l'algèbre de Lie (de dimension 3) $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ et satisfont les relations de commutation : $[H, X] = 2X$, $[H, Y] = -2Y$ et $[X, Y] = H$.

Exemple I.1.8. L'espace vectoriel $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n, à coefficients réels et de trace nulle est muni du crochet $[X, Y] = XY - YX$, est une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$ de dimension $n^2 - 1$.

Exemple I.1.9. Les exemples précédents sont des cas particuliers de la situation générale suivante. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre associative sur $\mathbb{K}$. Le produit dans $\mathcal{A}$, noté $X \cdot Y$, induit un crochet sur $\mathcal{A}$: $[X, Y] = X \cdot Y - Y \cdot X$, de sorte que $\mathcal{A}$ possède une structure d'algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$.

Exemple I.1.10. Soit M une variété de classe C^∞. Tout champ de vecteur X sur M induit une dérivation D_X définie par $D_X f(x) = T_x f(X(x))$, où $T_x f$ désigne la différentielle de f en x. On définit alors le crochet de deux champs de vecteurs X et Y sur M par : $[X, Y] = D_X \circ D_Y - D_Y \circ D_X$. Ainsi l'espace vectroriel réel des champs de vecteurs de classe C^∞ sur M possède une structure d'algèbre de Lie réelle. En fait un calcul simple permet de calculer localement le crochet de deux champs de vecteurs. Soit (U, ϕ) une carte de M avec $\phi = (x_1, \cdots, x_m)$, où m désigne la dimension de M. Alors $[\sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_{j=1}^m b_j \frac{\partial}{\partial x_j}] = \sum_{i,j=1}^m (a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}) \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Définition I.1.11. Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est abélienne si $[X, Y] = 0$ pour tous X et Y dans $\mathfrak{g}$.

Exemple I.1.12. Tout espace vectoriel V sur $\mathbb{K}$ est muni d'une structure d'algèbre de Lie abélienne sur $\mathbb{K}$.

Exemple I.1.13. Toute algèbre de Lie de dimension 1 sur $\mathbb{K}$ est abélienne.

I.2 Constantes de structure

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension n sur $\mathbb{K}$. Soit $\{X_j\}_{1 \leq j \leq n}$ une base de $\mathfrak{g}$, en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Nous avons donc $[X_j, X_k] = \sum_{i=1}^n c_i^{jk} X_i$, où $c_i^{jk} \in \mathbb{K}$. Par bilinéarité, la structure d'algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ est complétement déterminée par la valeur des c_i^{jk}, $1 \leq i, j, k \leq n$. Notons que $c_i^{jj} = 0$ et $c_i^{kj} = -c_i^{jk}$.

Définition I.2.1. Les scalaires c_i^{jk}, $1 \leq i, j, k \leq n$, sont appelés les *constantes de structure* de $\mathfrak{g}$ relativement à la base $\{X_j\}_{1 \leq j \leq n}$.

Exemple I.2.2. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie abélienne, alors ses coefficients de structure sont tous nuls relativement à toute base de $\mathfrak{g}$.

Exemple I.2.3. Pour l'algèbre de Lie Aff($\mathbb{R}$), notons $X_1 = X$ et $X_2 = Y$. Alors les constantes de structure cette algèbre, relativement à la base $\{X_1, X_2\}$, sont données par : $c_1^{12} = 0$ et $c_2^{12} = 1$.

Exemple I.2.4. Reprenons l'algèbre de Lie $\mathfrak{o}(3)$ considérée dans l'exemple I.1.6 et posons $X_1 = R_x$, $X_2 = R_y$ et $X_3 = R_z$. Les constantes de structure de $\mathfrak{o}(3)$ relativement à la base $\{X_1, X_2, X_3\}$ sont données par : $c_3^{12} = c_1^{23} = c_2^{31} = 1$.

Exemple I.2.5. Soit E_{ij} la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient situé à la i ème ligne et j ème colonne, lequel vaut 1. L'ensemble

$\{E_{ij}\}_{1\leq i,j\leq n}$ forme évidemment une base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$, des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. Un calcul direct montre que $[E_{ij},E_{kl}]=\delta_{jk}E_{il}-\delta_{il}E_{kj}$, où δ_{rs} désigne le symbole de Kronecker, i.e $\delta_{rs}=1$ si $r=s$ et $\delta_{rs}=0$ sinon. En notant $[E_{ij},E_{kl}]=\sum c_{rs}^{ijkl}E_{rs}$, nous obtenons que $c_{il}^{ijkl}=\delta_{jk}$ et $c_{kj}^{ijkl}=-\delta_{il}$.

I.3 Centre d'une algèbre de Lie

Définition I.3.1. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$. Le *centre* de $\mathfrak{g}$ est

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{g})=\{X\in\mathfrak{g}\mid [X,Y]=0,\ \forall Y\in\mathfrak{g}\}.$$

Exemple I.3.2. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie abélienne, alors $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})=\mathfrak{g}$.

Exemple I.3.3. Le centre de l'algèbre de Lie $\mathfrak{o}(3)$ est trivial. Il en est de même pour le centre de Aff$(\mathbb{R})$.

Exemple I.3.4. Le centre de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices scalaires, i.e $\mathcal{Z}(\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}))\simeq\mathbb{K}$.

Exemple I.3.5. Le centre de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$ est trivial.

Exemple I.3.6. Considérons l'algèbre de Lie $\Xi(M)$ des champs de vecteurs de classe C^∞ sur une variété M définie dans l'exemple I.1.10. En utilisant la formule du crochet donné dans l'exemple I.1.10, on trouve que le centre de $\Xi(M)$ est trivial.

I.4 Centralisateurs et normalisateurs

Définition I.4.1. Soit E un sous-ensemble d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Le *normalisateur* (resp. *centralisateur*) $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}(E)$ (resp. $\mathcal{Z}_{\mathfrak{g}}(E)$) de E dans $\mathfrak{g}$ est défini par $\{X\in\mathfrak{g}\mid [X,E]\subset E\}$ (resp. $\{X\in\mathfrak{g}\mid [X,E]=0\}$).

En particulier si E est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ alors $\mathcal{Z}_{\mathfrak{g}}(E)\subset\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}(E)$.

Exemple I.4.2. Si $E=\{0\}$ ou si $E=\mathfrak{g}$ alors $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}(E)=\mathfrak{g}$. Quant au centralisateur, il est égal à $\mathfrak{g}$ si $E=\{0\}$ et au centre de $\mathfrak{g}$ si $E=\mathfrak{g}$.

Exemple I.4.3. Si E est le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}(2,\mathbb{K})$ engendré par la matrice $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, alors $\mathcal{Z}_{\mathfrak{g}}(E)=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}\mid a,b\in\mathbb{K}\right\}\neq\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}(E)=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix}\mid a,b,c\in\mathbb{K}\right\}$.

Exemple I.4.4. Si E est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ engendré par la matrice $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, alors $\mathcal{Z}_{\mathfrak{g}}(E)=\left\{\begin{pmatrix}0&b\\0&0\end{pmatrix}\mid b\in\mathbb{K}\right\}\neq\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}(E)=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\0&-a\end{pmatrix}\mid a,b\in\mathbb{K}\right\}$.

Exemple I.4.5. Si E est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{K})$ engendrée par la matrice $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, alors $\mathcal{Z}_{\mathfrak{g}}(E)=\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}(E)=\left\{\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&-\alpha\end{pmatrix}\mid \alpha\in\mathbb{K}\right\}$.

I.5 Idéaux dans les algèbres de Lie

Définition I.5.1. Un sous-espace vectoriel $\mathfrak{s}$ d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est un *idéal* de $\mathfrak{g}$ si $[\mathfrak{g},\mathfrak{s}]\subset\mathfrak{s}$.

Exemple I.5.2. L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ est un idéal de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$.

Exemple I.5.3. L'espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) dont tous les termes diagonaux sont nuls est un idéal de l'algèbre de Lie matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures).

Exemple I.5.4. Le sous-espace vectoriel $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ engendré par les crochets $[X,Y]$, $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in \mathfrak{g}$, est un idéal de $\mathfrak{g}$, appelé *commutant* de $\mathfrak{g}$ ou *idéal dérivé* de $\mathfrak{g}$. En particulier l'algèbre de Lie quotient $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ est abélienne.

Exemple I.5.5. Le centre $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est un idéal abélien de $\mathfrak{g}$.

Remarque I.5.6 *Il est facile de voir que si $\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{s}'$ sont deux idéaux d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, il en est de même de $\mathfrak{s}+\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{s}\cap\mathfrak{s}'$ et $[\mathfrak{s},\mathfrak{s}']$.*

I.6 Sous-algèbres de Lie

Définition I.6.1. Une *sous-algèbre de Lie* d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel $\mathfrak{s}$ de $\mathfrak{g}$ stable par le crochet de Lie de $\mathfrak{g}$, i.e $[\mathfrak{s},\mathfrak{s}] \subset \mathfrak{s}$.

Exemple I.6.2. Tout idéal d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. En particulier l'idéal $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, appelée *l'algèbre de Lie dérivée*.

Exemple I.6.3. Le centralisateur d'un sous-ensemble de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$.

Exemple I.6.4. Le normalisateur d'une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{s}$ de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ qui contient $\mathfrak{s}$ comme idéal.

Exemple I.6.5. L'algèbre de Lie Aff$(\mathbb{R})$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{R})$.

Exemple I.6.6. L'algèbre de Lie $\mathfrak{o}(3)$ des "rotations infinitésimales" de l'espace est en fait une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(3,\mathbb{R})$.

Exemple I.6.7. L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{K})$.

Exemple I.6.8. L'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre n triangulaires supérieures (ou inférieures) est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R})$.

I.7 Morphismes d'algèbres de Lie, représentations et représentation adjointe

Définition I.7.1. Un *morphisme* d'algèbres de Lie est une application linéaire T qui respecte les crochets de Lie, i.e $T([\cdot,\cdot]) = [T(\cdot),T(\cdot)]$.

Il est clair que le noyau (resp. l'image) d'un morphisme $\mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ d'algèbres de Lie est un idéal (resp. une sous-algèbre de Lie) de $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{h}$).

Exemple I.7.2. Soient M et N deux variétés différentiables de classe C^∞, et $f : M \to N$ un difféomorphisme. Soit $\Xi(M)$ (resp. $\Xi(N)$) l'algèbre de Lie des champs de vecteurs de classe C^∞ sur M (resp. N). Alors l'application $f_\star : \Xi(M) \to \Xi(N)$, définie par $(f_\star X)(f(x)) = T_x f(X(x))$, est un isomorphisme d'algèbres de Lie.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$. Nous avons vu à l'exemple I.1.3 que si V est un espace vectoriel complexe alors l'algèbre $\mathfrak{gl}(V)$ des endomorphismes de V est naturellement munie d'une structure d'algèbre de Lie.

Définition I.7.3. Une *représentation* de $\mathfrak{g}$ dans un espace vectoriel complexe V est un morphisme d'algèbres de Lie $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$. La dimension de cette représentation est la dimension de V sur $\mathbb{K}$. La représentation (ϕ, V) est *fidèle* si ϕ est injective. De plus la représentation (ϕ, V) est *irréductible* si les seuls sous-espaces vectoriels de V qui sont invariants par $\mathfrak{g}$ sont $\{0\}$ et V lui même, i.e V est irréductible si $\phi(\mathfrak{g})W \subseteq W \Leftrightarrow W = \{0\}$ ou $W = V$.

Si plusieurs représentations interviennent, nous préciserons l'action, i.e nous écrirons (ϕ, V) au lieu de V.

Définition I.7.4. La *somme directe* de deux représentations (ϕ_1, V_1) et (ϕ_2, V_2) de $\mathfrak{g}$ est la représentation $(\phi_1 \oplus \phi_2, V_1 \oplus V_2)$ de $\mathfrak{g}$ définie par $(\phi_1 \oplus \phi_2)(X)(v_1 + v_2) = \phi_1(X)v_1 + \phi_2(X)v_2$ pour tous $X \in \mathfrak{g}$, $v_1 \in V_1$ et $v_2 \in V_2$.

Définition I.7.5. Le *produit tensoriel* de deux représentations (ϕ_1, V_1) et (ϕ_2, V_2) de $\mathfrak{g}$ est la représentation $(\phi_1 \otimes \phi_2, V_1 \otimes V_2)$ de $\mathfrak{g}$ définie par $(\phi_1 \otimes \phi_2)(X)(v_1 \otimes v_2) = (\phi_1(X)v_1) \otimes v_2 + v_1 \otimes (\phi_2(X)v_2)$ pour tous $X \in \mathfrak{g}$, $v_1 \in V_1$ et $v_2 \in V_2$.

Exemple I.7.6. Toute représentation de dimension 1 est irréductible.

Exemple I.7.7. L'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ agit naturellement sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ (action d'une matrice réelle carrée d'ordre n sur un vecteur de $\mathbb{R}^n$).

Exemple I.7.8. L'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ agit sur le produit tensoriel $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$: $X \cdot (v_1 \otimes v_2) = X \cdot v_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes X \cdot v_2$ où $X \cdot v_i$ désigne l'action naturelle d'une matrice réelle carrée d'ordre n sur un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

Parmi les représentations de $\mathfrak{g}$, il y en a une qui se distingue par son rôle crucial dans l'étude de la structure de $\mathfrak{g}$.

Définition I.7.9. Le morphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ défini par $X \mapsto [X, \cdot]$ est appelé la *représentation adjointe* de $\mathfrak{g}$ et est noté ad.

Exemple I.7.10. Pour l'algèbre de Lie Aff$(\mathbb{R})$ nous avons $\mathrm{ad}(X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{ad}(Y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exemple I.7.11. Considérons l'algèbre de Lie $\mathfrak{o}(3)$ des "rotations infinitésimales" de l'espace. Nous avons, dans les notations de l'exemple I.1.6, $\mathrm{ad}(R_x) = R_x$, $\mathrm{ad}(R_y) = R_y$ et $\mathrm{ad}(R_z) = R_z$.

I.8 Forme de Killing

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Nous désignons par $V^\star$ le dual vectoriel de V, i.e l'espace vectoriel des formes linéaires sur V. Soient $b : V \times V \to \mathbb{K}$ une application bilinéaire et U un sous-espace vectoriel de V.

Définition I.8.1. Le *radical* de b est le sous-espace vectoriel de V :

$$\mathrm{rad}(b) = \{v \in V \mid b(v, v') = 0, \ \forall v' \in V\}.$$

Nous dirons que b est *non-dégénérée* (resp. *dégénérée*) si le radical de b est trivial (resp. non trivial).

Définition I.8.2. *L'orthogonal* de U dans V est le sous-espace vectoriel de V :

$$U^\perp = \{v \in V \mid b(v, v') = 0,\ \forall v' \in U\}.$$

Nous noterons $b\mid_{U\times U}$ la restriction de b à $U \times U$.

Proposition I.8.3

(i) $rad(b\mid_{U\times U}) = U \cap U^\perp$*. Si, de plus, b est non-dégénérée alors*
(ii) $\dim(U) + \dim(U^\perp) = \dim(V)$,
(iii) $U \oplus U^\perp = V \Leftrightarrow b\mid_{U\times U}$ *est non-dégénérée.*

Preuve : L'assertion (i) est une simple reformulation des définitions. La preuve de (ii) est standard, nous la rappelons pour le plaisir. Considérons les applications linéaires $\phi : V \to V^\star$ et $\psi : V \to U^\star$ définies par $v \mapsto b(v, \cdot)$. En particulier, $\ker(\psi) = U^\perp$, et ϕ est un isomorphisme si, et seulement si, b est non-dégénérée. Soit U' un sous-espace vectoriel de V tel que $V = U \oplus U'$. Tout élément $u^\star$ de $U^\star$ définit un élément $v^\star$ de $V^\star$ tel que $v^\star\mid_U = u^\star$ et $v^\star\mid_{U'} = 0$. Puisque ϕ est un isomorphisme, alors il existe v dans V tel que $\phi(v) = v^\star$, de sorte que $\psi(v) = u^\star$, i.e ψ est surjective, et donc $\dim(V) = \dim(\text{im}(\psi)) + \dim(\ker(\psi)) = \dim(U) + \dim(U^\perp)$. L'assertion (iii) est maintenant une conséquence directe de (i) et (ii). □

Remarque I.8.4 *Il se peut que b soit non-dégénérée mais que sa restriction à* $U \times U$ *soit dégénérée. L'exemple classique d'une telle situation est le suivant :* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$, $b((x, y), (x', y')) = xx' - yy'$ *et* $U^\perp = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xt - yt = 0,\ \forall t \in \mathbb{R}\} = U$.

Considérons le cas où V est une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{K}$. Alors il est facile de montrer que l'application κ définie par $\kappa : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{K}, (X, Y) \mapsto \text{Tr}(\text{ad}(X) \circ \text{ad}(Y))$ est :

(i) bilinéaire,

(ii) symétrique,

(iii) ad-invariante, i.e $\kappa(\text{ad}(X)(Y), Z) + \kappa(Y, \text{ad}(X)(Z)) = 0$ pour tous X, Y et Z dans $\mathfrak{g}$, avec

(iv) $\kappa(X, Y) = \frac{1}{2}\big(\kappa(X+Y, X+Y) - \kappa(X, X) - \kappa(Y, Y)\big)$ pour tous X et Y dans $\mathfrak{g}$.

Définition I.8.5. L'application bilinéaire κ est appelée la *forme de Killing* de $\mathfrak{g}$.

Dorénavant les espaces orthogonaux que nous considérons seront toujours relatifs à une forme de Killing (que nous préciserons si plusieurs algèbres de Lie interviennent).

Proposition I.8.6 *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie sur* $\mathbb{K}$ *et* κ *sa forme de Killing. Si* $\mathfrak{s}$ *est un idéal de* $\mathfrak{g}$ *alors :*
(i) l'orthogonal $\mathfrak{s}^\perp$ *de* $\mathfrak{s}$ *est un idéal de* $\mathfrak{g}$,
(ii) la forme de Killing $\kappa_{\mathfrak{s}}$ *de* $\mathfrak{s}$ *est la restriction à* $\mathfrak{s}$ *de la forme de Killing de* $\mathfrak{g}$,
i.e $\kappa_{\mathfrak{s}} = \kappa\mid_{\mathfrak{s}\times\mathfrak{s}}$,
(iii) si de plus κ *est non-dégénérée, alors* $\kappa_{\mathfrak{s}}$ *est non-dégénérée,*

Preuve : (i) découle de la ad-invariance de κ qui implique que :

$\kappa([A, B], C) = \kappa(A, [B, C]) = 0$ pour tous $A \in \mathfrak{s}^{\perp}$, $B \in \mathfrak{g}$ et $C \in \mathfrak{s}$.

Pour (ii), soit V un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus V$. Alors, pour tous X et Y dans $\mathfrak{s}$, nous avons : $(\mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(Y))(\mathfrak{s}) \subset \mathfrak{s}$ et $(\mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(Y))(V) \subset \mathfrak{s}$, de sorte que $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(Y) \mid_{\mathfrak{s}\times\mathfrak{s}}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(Y))$. Finalement, soit $X \in \mathfrak{s}$ tel que $\kappa_{\mathfrak{s}}(X, Y) = \kappa(X, Y) = 0$ pour tout $Y \in \mathfrak{s}$. Rappelons que, d'après (ii), $\kappa_{\mathfrak{s}} = \kappa \mid_{\mathfrak{s}\times\mathfrak{s}}$. Par ad-invariance de la forme de Killing, cela implique que $\kappa(X, [Y, W]) = \kappa([X, Y], W) = 0$ pour tout $W \in \mathfrak{g}$. Ainsi, puisque κ est non-dégénérée, nous obtenons que $[X, Y] = 0$ pour tout $Y \in \mathfrak{s}$. L'endomorphisme $\big(\mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(W)\big)^2$ de $\mathfrak{g}$ est trivial pour tout $W \in \mathfrak{g}$. En effet, nous avons : $\big(\mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(W)\big)(A) = 0$ si $A \in \mathfrak{s}$ et $\big(\mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(W)\big)(A) \in \mathfrak{s}$ si $A \in V$. Autrement dit, $\big(\mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(W)\big)$ est un endomorphisme nilpotent de $\mathfrak{g}$ et donc $\mathrm{Tr}\big(\mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(W)\big) = 0$. Cela entraine que $\kappa(X, W) = 0$ pour tout $W \in \mathfrak{g}$, soit $X = 0$ puisque κ est non-dégénérée. □

Exemple I.8.7. Pour tous A et M dans $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, nous avons $\mathrm{ad}(A)^2(M) = A^2M - 2AMA - MA^2$ de sorte que $\kappa(A, A) = 2n\mathrm{Tr}(A^2) - 2\mathrm{Tr}(A)^2$.

Exemple I.8.8. En utilisant l'exemple précédent, nous trouvons que $\kappa(A, A) = 2n\mathrm{Tr}(A^2)$ pour tout A dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$.

Exemple I.8.9. Pour l'algèbre de Lie Aff($\mathbb{R}$), nous avons, dans les notations de l'exemple I.1.5, $\kappa(X, X) = 1$, $\kappa(X, Y) = 0$ et $\kappa(Y, Y) = 0$.

Exemple I.8.10. Considérons l'algèbre de Lie $\mathfrak{o}(3)$ des "rotations infinitésimales" de l'espace. Nous avons, dans les notations de l'exemple I.1.6, $\kappa(X, X) = -2(a^2 + b^2 + c^2)$ pour tout $X = aR_x + bR_y + cR_z$.

Exemple I.8.11. Le radical de la forme de Killing de Aff($\mathbb{R}$) est trivial, donc κ est dégénérée.

Exemple I.8.12. Le radical de la forme de Killing de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ n'est pas trivial, donc κ est dégénérée. En effet, rad(κ) contient les matrices scalaires.

I.9 Dérivations, sommes directes et sommes semidirectes d'algèbres de Lie

Définition I.9.1. Une *dérivation* de $\mathfrak{g}$ est un endomorphisme D de $\mathfrak{g}$ tel que $D([X, Y]) = [D(X), Y] + [X, D(Y)]$ pour tous X et Y dans $\mathfrak{g}$. On notera $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$ l'ensemble des dérivations de $\mathfrak{g}$.

Exemple I.9.2. Si $\mathfrak{g} = V$ est un espace vectoriel muni d'une structure d'algèbre de Lie abélienne, alors $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$ est l'espace vectoriel de tous les endomorphismes de V.

Exemple I.9.3. D'après l'identité de Jacobi, l'endomorphisme $\mathrm{ad}(W)$ est une dérivation de $\mathfrak{g}$ pour tout $W \in \mathfrak{g}$.

Définition I.9.4. Une dérivation D de $\mathfrak{g}$ est dite *intérieure* si $D = \mathrm{ad}(X)$ pour un élément X de $\mathfrak{g}$.

Remarque I.9.5 *Réciproquement, si V est un espace vectoriel muni d'une application bilinéaire antisymétrique β telle que $A \mapsto \beta(W, A)$ soit une dérivation de V, pour tout $W \in V$, alors V est une algèbre de Lie et β est un crochet de Lie.*