

■ 1 ■

Nombres complexes

FORME ALGÈBRE ET OPERATIONS

L'ensemble des nombres complexes se note $\mathbb{C}$.

► La forme **algébrique** d'un nombre complexe z s'écrit : $z = x + i y$, où x et y sont des nombres réels et i vérifie $i^2 = -1$.

x est la partie réelle du complexe z notée $\Re(z)$ et y sa partie imaginaire notée $\Im(z)$.

Dans le repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, il y a équivalence entre les propriétés suivantes :

- le point M a pour coordonnées (x, y) ;
- le point M a pour affixe $z = x + iy$;
- le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour affixe $z = x + iy$.

► Opérations algébriques

$$z + z' = (x + i y) + (x' + i y') = (x + x') + i(y + y')$$

$$z z' = (x + i y)(x' + i y') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

Deux complexes z et z' sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire :

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

Soit $z = x + i y$, le conjugué de z s'écrit : $\bar{z} = x - i y$.

Les inverses ou les quotients se calculent en utilisant le conjugué du dénominateur :

$$\text{si } z \neq 0 : \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \times \bar{z}} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

• Si z est l'affixe de M et z' l'affixe de M' :

$z + z'$ a pour image le vecteur $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$

kz (où k est un réel) a pour image le vecteur $k \overrightarrow{OM}$

$z' - z$ a pour image le vecteur $\overrightarrow{MM'}$.

FORME TRIGONOMETRIQUE OU EXPONENTIELLE

Le module r du nombre complexe z est la longueur OM , M ayant pour affixe

$$z : OM = r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

On appelle argument, du complexe z , **non nul**, l'angle orienté défini par $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \arg z = \theta$.

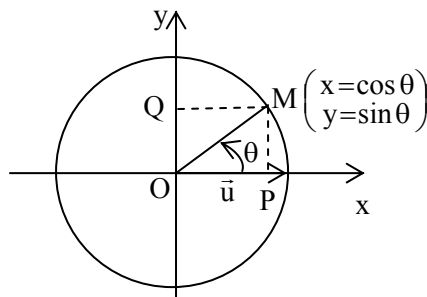
▶ **Forme trigonométrique**

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

▶ **Forme exponentielle**

$$z = r e^{i\theta}$$

Géométriquement, sur le cercle trigonométrique de rayon 1, orienté dans le sens direct $\cos \theta + i \sin \theta$ est l'affixe du point M dessiné ci-dessous :



On retient les formules générales permettant de déterminer un argument θ du complexe z :

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{r} \\ \sin \theta = \frac{y}{r} \end{cases}$$

▶ **Propriétés des conjugués**

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'} ;$$

$$z \times \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2 ; \quad \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$$

▶ **Propriétés des modules**

$$|z z'| = |z| \times |z'| ; \quad \text{si } z' \neq 0, \quad \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

Si A et B ont pour affixes respectives a et b : $|b - a| = AB$.

▶ **Propriétés des arguments**

$$\text{Si } z \neq 0 \text{ et } z' \neq 0 : \arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z') ; \quad \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') ; \arg(z^n) = n \arg(z), n \in \mathbb{Z}.$$

► **Utilisation d'une écriture simplifiée**

On pose $z = r e^{i\theta} = [r, \theta]$ et $z' = [r', \theta']$; ($z \neq 0$ et $z' \neq 0$) :

$$z \times z' = [r \times r', \theta + \theta'] ; \frac{1}{z} = \left[\frac{1}{r}, -\theta \right] ; \frac{z}{z'} = \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta' \right]$$

► **Formules de Moivre**

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta, n \in \mathbb{Z}$$

► **Formules d'Euler**

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} ; \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

EQUATION DU SECOND DEGRE

Soit l'équation $az^2 + bz + c = 0$, où $a \in \mathbb{R}^*$ et $(b, c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Si $\Delta \geq 0$, on retrouve les solutions réelles :

$$z' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Si $\Delta < 0$, les solutions sont les complexes conjugués :

$$z' = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} ; z'' = \bar{z}' = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Pour la spécialité génie optique

• L'équation $az^2 + bz + c = 0$, $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$, admet deux solutions dans l'ensemble des complexes $\mathbb{C}$:

On pose $\Delta = b^2 - 4ac = \alpha + i\beta$.

On détermine les réels x et y pour que $\Delta = (x + iy)^2$ en remarquant :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \alpha \\ 2xy = \beta \\ |\Delta| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = x^2 + y^2 \end{cases}$$

• **Transformations du plan**

Soit $M'(z')$ l'image de $M(z)$ par une transformation f du plan.

L'écriture complexe qui permet d'exprimer z' en fonction de z est :

si f est la **translation** de vecteur $\vec{v}$ d'affixe a : $z' = z + a$;

si f est l'**homothétie** de centre O et de rapport non nul k : $z' = kz$;

si f est la **rotation** de centre O et d'angle θ : $z' = e^{i\theta} z$;

si f est la **similitude** de centre O , d'angle θ et de rapport k ($k \in \mathbb{R}^{*+}$) :

$$z' = ke^{i\theta} z ;$$

si f est l'*inversion* de pôle O et de puissance 1 : $z' = \frac{1}{\bar{z}}$.

► Énoncés des exercices ◀

■ Exercice 1 (20 min)

Soit z_1 et z_2 les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{3}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} ; z_2 = -\frac{3}{2} - 3i \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

1. Déterminer les formes trigonométriques de z_1 et z_2 .
2. On note z_3 et z_4 et z_5 les nombres complexes suivants :

$$z_3 = z_1 + z_2 ; z_4 = -\frac{z_2}{z_1} ; z_5 = z_2^7 .$$

Calculer les nombres complexes z_3 , z_4 et z_5 sous forme exponentielle et algébrique.

■ Exercice 2 (45 min)

Le plan complexe est rapporté à un repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ orthonormé direct

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (1) :

$$\frac{z-2}{z-1} = z .$$

On donnera le module et un argument de chaque solution.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (2) :

$$\frac{z-2}{z-1} = i$$

On donnera la solution sous forme algébrique.

3. Soit M , A et B les points d'affixes respectives : z , 1 et 2.

On suppose que M est distinct des points A et B .

- a) Interpréter géométriquement le module et un argument de $\frac{z-2}{z-1}$.
- b) Retrouver géométriquement la solution de l'équation (2).

4.

- a) Montrer à l'aide d'une interprétation géométrique, que toute solution de l'équation dans $\mathbb{C}$:

$\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^n = i$, où n désigne un entier naturel non nul donné, a pour partie réelle $\frac{3}{2}$.

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (3) :

$$\left(\frac{z-2}{z-1}\right)^2 = i.$$

On mettra les solutions sous forme algébrique.

■ ■ Exercice 3 (30 min)

Soit $Z = -(\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$.

1. Calculer Z^2 .
2. En déduire le module et un argument de Z^2 .
3. En déduire le module et un argument de Z .

■ Exercice 4 (30 min)

1. Linéariser :

$$f(x) = \cos^2 x \sin 2x ; g(x) = \cos 3x \sin^2 x.$$

2. Ecrire $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$.

■ ■ Exercice 5 (25 min)

α étant un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0 ; \pi]$ et z un nombre complexe, on considère le polynôme $P(z)$, défini par :

$$P(z) = z^3 - (1 - 2\sin\alpha)z^2 + (1 - 2\sin\alpha)z - 1.$$

1.

- a) Calculer $P(1)$.

- b) En déduire l'existence de trois nombres réels a, b, c tels que :

$$P(z) = (z-1)(az^2 + bz + c).$$

Déterminer a, b , et c .

- c) Résoudre, dans l'ensemble des complexes $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.

2. On considère les trois nombres complexes :

$$z_1 = 1 ; z_2 = -\sin\alpha + i \cos\alpha ; z_3 = -\sin\alpha - i \cos\alpha.$$

Déterminer le module et un argument de chacun de ces nombres complexes.

■ ■ Exercice 6 (Génie optique) (45 min)

- Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$9z^2 - 3(3 - i)z + 4 - 3i = 0.$$
- On pose $f(z) = z^3 - 4(2 + i)z^2 + 2(9 + 10i)z - 12(1 + 2i)$.
 - Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une racine réelle. En déduire une factorisation de $f(z)$.
 - Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.
- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - (10i - 5)z - 14i - 48 = 0.$$
 - En déduire les solutions de l'équation :

$$z^4 - (10i - 5)z^2 - 14i - 48 = 0.$$
 - Soient A et B les points du plan complexe d'affixes respectives :
 $a = 2 + i$ et $b = 1 + 3i$.
 Déterminer la similitude de centre O qui transforme A en B.

■ Exercice 7 (45 min)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).

On note A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe $3 + 2i$.

On appelle f l'application qui, à tout point M distinct de A et d'affixe z ,

associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = \frac{z - 1 + 2i}{z - 1}$.

- Calculer les affixes des points O' et B', images respectives des points O et B par f .
Placer les points A, O', B et B' dans le plan.
- Calculer, pour tout complexe z différent de 1, le produit :

$$(z' - 1)(z - 1).$$
 - En déduire que, pour tout point M distinct de A, on a :

$$AM \cdot AM' = 2 \text{ et } (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$
- Démontrer que, si M appartient au cercle (C) de centre A passant par O, alors M' appartient à un cercle (C'). En préciser le centre et le rayon. Construire (C) et (C').
- Déterminer l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{AB})$.
 - Démontrer que, si M est un point autre que A de la demi-droite (d) d'origine A, passant par B, alors M' appartient à une demi-droite que l'on précisera.
- On appelle P le point d'intersection du cercle (C) et de la demi-droite (d).

Placer son image P' sur la figure.

■ Exercice 8 (Génie optique) (45 min)

Le plan complexe P est rapporté à un repère direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, ayant comme unité graphique 3 cm.

Les nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4 et z_5 que l'on va calculer dans cet exercice seront tous exprimés sous forme algébrique et sous forme exponentielle.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$.

On pose $z_1 = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$ et $z_2 = \frac{\sqrt{3} - i}{2}$.

Exprimer z_1 et z_2 sous forme exponentielle et placer les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2 dans le plan P .

2. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Calculer l'affixe z_3 du point $M_3 = r(M_2)$.

Placer M_3 sur la figure précédente.

3. Soit t la translation dont le vecteur $\vec{w}$ a pour affixe $-\frac{\sqrt{3} + i}{2}$.

Calculer l'affixe du point $M_4 = t(M_2)$.

Placer M_4 sur la figure.

4. Soit z_5 l'affixe du point M_5 image de M_1 dans l'homothétie de centre O et de rapport -1 .

Calculer z_5 et placer le point M_5 sur la figure.

■ Exercice 9 (40 min)

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. On note i

le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Soit f l'application qui, à tout point m du plan P d'affixe z ($z \neq 1$), associe le

point M d'affixe $Z = \frac{z}{1+z} = 1 - \frac{1}{1+z}$.

Partie A

1. Déterminer l'ensemble D des points d'affixe $-\frac{3}{2} + iy$ ($y \in \mathbb{R}$).

2. Soit $z_1 = z + 1$. Préciser la transformation géométrique t_1 qui associe à un point m d'affixe z , le point M_1 d'affixe z_1 .

Quelle est l'image, notée D_1 de D par la transformation t_1 ?

3. Soit t_2 la transformation géométrique qui, au point d'affixe z ($z \neq 0$) associe le point M_2 d'affixe $z_2 = \frac{1}{z}$. Donner la nature de t_2 .
Quelle est l'image, notée Γ_2 , de D_1 par la transformation t_2 ?
4. Soit t_3 la transformation géométrique qui, au point d'affixe z associe le point M_3 d'affixe $z_3 = -z$. Préciser la nature de t_3 .
Quelle est l'image, notée Γ_3 , de Γ_2 par la transformation t_3 ?
5. Déterminer, lorsque $z = -\frac{3}{2} + i y$, l'ensemble Γ des points M d'affixe

$$Z = 1 - \frac{1}{1+z} \quad (y \in \mathbb{R}).$$

6. Représenter, sur une même figure, les ensembles D , D_1 , Γ_2 , Γ_3 et Γ .
On prendra 2 cm pour unité graphique.

Partie B

1. Soit $z = -\frac{3}{2} + i y$ ($y \in \mathbb{R}$). On remarque que $Z = \frac{z}{1+z}$ peut alors s'écrire

$$Z = \frac{3-2iy}{1-2iy}.$$

Montrer que Z possède un argument noté $\varphi(y)$ tel que :

$$\varphi(y) = \arctan(2y) - \arctan\left(\frac{2}{3}y\right).$$

2. Etudier les variations de la fonction φ sur $\mathbb{R}$ (préciser les limites aux bornes) et en déduire la valeur maximale φ_m de φ .
3. Utiliser la figure établie dans la partie A.6) pour retrouver le résultat de la question précédente.

..... ■ CONTROLE (2 h) ■

Exercice 1 (3/20)

Linéariser : $A(x) = \cos^2 x \sin^2 x$.

Exercice 2 (10/20)

Partie A

On considère le polynôme P de la variable complexe z défini par :

$$P(z) = z^4 + 2\sqrt{3} z^3 + 8z^2 + 2\sqrt{3} z + 7$$