

Chapitre 1

Variété

1.1 Introduction

Le but essentiel de ce chapitre est d'introduire la notion de variété. Contrairement à la présentation axiomatique, on ne donnera pas d'emblée une définition de cet objet. En effet celui-ci peut apparaître de deux façons pour le physicien. Si son intérêt se porte sur la structure de l'espace-temps ou bien sur la structure de l'univers (pour les cosmologistes) il n'a de cet objet qu'un abord local : il ne le perçoit et ne l'interroge qu'à partir de petits domaines dans lesquels, au moyen de coordonnées il écrit les lois de la physique. La question est alors de reconstituer l'espace à partir de ces perceptions locales.

Cependant des structures d'espace peuvent également apparaître globalement dans les modèles mathématiques utilisés pour décrire le réel. Donnons deux exemples. Tout apprenti physicien a été amené à déterminer les courbes isothermes d'un système thermodynamique ou les équipotentielles d'un champ électrostatique. Un autre exemple est l'espace de configurations d'un système mécanique imposées par des contraintes géométriques : on regarde les relations imposées entre les variables du système. Ces relations font que les orbites des points du système sont contraintes à occuper des parties de l'espace $\mathbb{R}^n$ si n est le nombre de paramètres du système ; par exemple l'étude d'un pendule double se ramène à l'étude de l'orbite d'un point sur le tore de dimension deux. Dans ces exemples, l'espace est donné globalement.

Il est nécessaire que ces deux points de vue aboutissent à une même définition. L'objet de ce chapitre est d'obtenir précisément une définition acceptable d'une structure d'espace utile à la physique du continu, en partant du point de vue local et de la confronter avec les exemples usuels d'espaces qui en constituent le test de validité. Dans la section 1.2, on expliquera la première vision à partir d'une rapide incursion dans l'histoire

des théories classiques. Nous nous inspirerons ensuite de cette vision pour introduire dans la section 1.3 un langage mathématique qui donnera lieu à une définition provisoire de ce qu'est une variété (c'est ainsi que se nommera l'espace muni de sa structure). Partant ensuite de l'objet, nous rajouterons dans la section 1.4 ce qui lui manque pour que l'on puisse le manipuler raisonnablement et lui adjoindre l'ingrédient constituant l'essence de toutes les théories classiques : la métrique. La boucle sera bouclée. Nous adopterons le même principe de construction pour une autre structure : celle de fibré vectoriel (section 1.5). C'est cette structure qui permet de décrire un système dynamique sur l'espace localement décrit par des équations différentielles. Puis nous terminerons ce chapitre par une description en section 1.6 d'un mode de fabrication des variétés en tant que variétés de niveau de certaine fonctions, idée que nous venons d'évoquer plus haut.

1.2 Problématique de la définition de l'espace

Il s'agit de déterminer dans cette section à travers une revue rapide des idées de la physique classique ce que doivent prendre en considération les géomètres pour établir le cadre mathématique nécessaire et suffisant à l'écriture des lois et principes de cette physique. Posons a priori deux questions :

a) Première question

Comment puis-je mathématiquement définir un espace dans lequel, au cours du temps je mène des expériences de physique et dans le cadre duquel j'ai l'ambition d'énoncer les principes de la physique ?

b) Deuxième question

Est-ce que le formalisme mathématique résultant de la première question va permettre de décrire des objets visibles (de représentation visible) tels que une sphère, une boule, un tore, une selle de cheval etc ?

Il convient d'être clair sur le concept d'espace en physique. La finalité de la physique est l'étude du monde réel, non vivant ; les objets de ses interrogations sont on ne peut plus concrets : masses, planètes, particules élémentaires, énergie... Il s'agit d'en quantifier les caractéristiques qu'on peut leur associer comme la trajectoire ou l'énergie d'une masse en mouvement mais également d'en décrire les formes : forme d'une molécule, d'un atome, d'un électron, forme d'une onde. On n'a pas imaginé, pour l'instant d'autre langage pour ce programme que celui des nombres et de la géométrie. Mais à partir du moment où l'expression de la réalité passe par un langage mathématique, l'objet concret ne peut être *compris* qu'au travers d'un objet abstrait. L'expérience doit montrer alors l'adéquation de l'abstrait et de la réalité concrète (en tout cas elle doit le faire si on

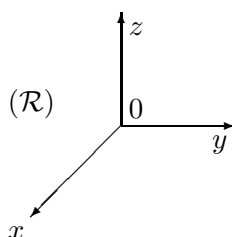


FIG. 1.1 – Référentiel

prétend faire de la physique). A ce niveau de réflexion, il faut constater, au travers de l'histoire de la physique que tout modèle est remis tôt ou tard en cause par l'expérience ; ainsi, les objets abstraits, seuls supports de notre pensée ne sont sûrement qu'une représentation éloignée des objets réels. La pensée abstraite nécessaire, paradoxalement interdit toute compréhension mais permet de prévoir certains comportements des objets étudiés : c'est la grandeur et l'humilité de la science.

C'est en ce sens qu'on peut affirmer que l'espace (-temps) de la physique est un objet abstrait qu'on veut représenter dans le cadre de la géométrie. Dans ce but, il faut dès maintenant être un peu plus précis dans les termes employés et distinguer la notion de structure d'un objet mathématique de celle de l'objet lui-même. Dans la démarche mathématique un objet se définit souvent au travers des propriétés qu'on va exiger de lui et qui sont en quelque sorte le cahier des charges de sa future structure. Et dans bien des situations, il reste au mathématicien le travail de montrer que la chimère dont il a décrit la « structure », existe bien, son unicité étant alors une qualité éminemment souhaitée. On comprend alors que dans le cas où il y a unicité la structure détermine l'objet, d'où la confusion possible de ces deux notions et l'utilisation abusive d'un même terme pour les nommer, en l'occurrence le mot « espace ». L'établissement de l'existence d'un objet ne satisfait pas autant le mathématicien que sa construction. Si cette construction mathématique permet de retrouver les objets usuels dont on a l'habitude, elle montrera son efficacité pour la description du monde réel.

Abordons maintenant la première question en faisant le détour annoncé par la physique. Pour quantifier des grandeurs telles que le temps, la vitesse, l'accélération d'un point matériel, on lui associe dans un référentiel $(\mathcal{R})$ tel que celui de la figure 1.1 trois coordonnées spatiales. On a alors la possibilité de définir la vitesse, l'accélération par rapport à ce référentiel et par conséquent on a accès à la description du mouvement. Une loi physique confrontera le mouvement et la cause du mouvement à partir de deux principes généraux de symétrie communs à toutes les théories classiques.

- *Premier principe de symétrie* : on peut exprimer le comportement de la matière par des lois mathématiques. Ces lois ne dépendent ni de

l'endroit ni de l'instant auxquels on les formule.

- *Deuxième principe de symétrie* : il existe des repères privilégiés qu'on ne peut distinguer par les lois de la physique qu'on y aura établies.

Comment se déclinent « concrètement » ces principes dans les théories classiques ? A tout seigneur, tout honneur, commençons par la théorie newtonienne de la mécanique par laquelle Isaac Newton a magistralement synthétisé tous les phénomènes de la gravitation en montrant ce qu'il y a de commun entre la chute d'une pierre et l'orbite des planètes du système solaire. Le deuxième principe de symétrie, appelé aussi principe de relativité de la physique newtonienne spécifie les trois points suivants (corpus de la physique newtonienne).

- 1) Il existe des référentiels privilégiés (galiléens) dans lesquels les lois de la mécanique s'expriment de façon identique : ces référentiels sont en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel absolu dont les axes passent par des étoiles « fixes ».
- 2) Chacun de ces référentiels est équipé de la métrique euclidienne standard que l'on peut noter $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, de sorte que les transformations qui échangent deux référentiels galiléens et qui laissent invariantes les lois de la mécanique sont celles qui laissent invariantes la métrique.
- 3) Le temps embarqué de deux observateurs liés à deux référentiels galiléens est le même : s'ils synchronisent leur horloge au moment où ils se rencontrent, leurs horloges resteront synchronisées et attribueront à tout événement étudié par les deux observateurs la même durée.

Si l'on se souvient de la conception corpusculaire de la lumière, défendue par Newton, ce principe apparaît comme un principe de relativité de toute la physique de son temps et non seulement de la mécanique. La mise en cause de ce corpus se produit à l'aube du vingtième siècle après un long débat qui commence dès le dix-septième siècle avec Huygens qui met en évidence l'aspect ondulatoire de la lumière en reléguant (provisoirement) la conception de Newton aux oubliettes. Cette conception ondulatoire de la lumière atteint sa consécration au dix-neuvième siècle avec les travaux de Maxwell. Celui-ci décrit la lumière comme le couplage d'un champ électrique et d'un champ magnétique dont il décrit entièrement les lois à l'aide de quatre équations. Ces lois vérifiées dans les moindres détails par l'expérience ont été le grain de sable qui a grippé le corpus newtonien. On comprit qu'il fallait contre vents et marées en conserver la proposition 1). Cependant ces équations de Maxwell ne sont plus invariantes par les isométries ¹ de la métrique euclidienne : *exit* le deuxième point du corpus newtonien et le doute est jeté sur le troisième qui prône un temps absolu. Comment intégrer

¹Une isométrie est une transformation qui conserve la métrique, c'est à dire la distance entre deux points et l'écart entre deux demi-droites.

cette donne dans un nouveau système qui doit englober le système newtonien selon le processus dialectique d'évolution des théories physiques ? La première réponse vient de Poincaré dans deux articles de l'année 1905 : un compte rendu à l'Académie des Sciences de Paris et un article explicitant les résultats du compte rendu paru le 23 juillet 1905 dans les *Rendiconti del circolo matematico di Palermo*. En imposant le principe d'invariance de la lumière par rapport à n'importe quel référentiel galiléen, il démontre en quelques lignes que les transformations dans l'espace-temps qui permettent de passer d'un référentiel galiléen, muni d'un temps propre à un autre également pourvu d'un temps propre (tout en maintenant donc la constance de la vitesse de la lumière), est une transformation que Woldemar Voigt avait établi en 1887 en exigeant précisément que l'équation d'onde devait apparaître de la même façon pour un observateur immobile par rapport à la source ou pour un observateur en mouvement par rapport à elle. Lorentz reprit en 1895 ces transformations (que l'on appelle aujourd'hui *transformations de Lorentz*) en les décrivant comme des changements de coordonnées nécessaires entre un système de coordonnées fictif lié à l'électron et un repère relatif lié à la Terre dans son mouvement par rapport à l'éther. Dans son article, Poincaré donne un sens physique et géométrique profond à cette transformation : celle-ci laisse invariante non plus la métrique de la mécanique newtonienne, mais la métrique (dite de Lorentz) $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$. Poincaré a compris qu'il fallait désormais remplacer le corpus de la physique de Newton par le suivant :

- 1') Il existe des référentiels privilégiés (galiléens) dans lesquels les lois de la physique s'expriment de façon identique.
- 2') Chacun de ces référentiels est équipé d'un temps propre et donc de quatre coordonnées (x, y, z, t) dans l'espace-temps. Il lui est associé la métrique de Lorentz de sorte que les transformations qui échangent deux référentiels galiléens et qui laissent invariantes les lois de la physique appartiennent au groupe qui conserve cette métrique.

La théorie de la relativité restreinte, ainsi fondée remet de l'ordre dans la compréhension des phénomènes électromagnétiques en imposant du coup une nouvelle mécanique. Par exemple dans cette conception c , la vitesse de la lumière relativement à n'importe quel référentiel galiléen apparaît comme vitesse limite de toute masse et de toute onde. Ceci s'oppose de front à la théorie de la gravitation de Newton. Dans celle-ci deux masses mises en présence l'une de l'autre subissent *instantanément* une force de gravitation qui en modifie les trajectoires.

Voilà le conflit qu'Einstein s'engage à résoudre. Voici très rapidement l'évolution des idées de 1905 à novembre 1915. Einstein énonce le principe suivant, dit « principe d'équivalence » : décrire les lois de la nature dans un référentiel galiléen en présence d'un champ de gravitation équivaut à les

décrire dans un référentiel galiléen accéléré. Ce principe permet de comprendre très simplement que la gravitation modifie la géométrie à laquelle est soumis un observateur lié à un référentiel galiléen. La géométrie de l'observateur accéléré devient « hyperbolique ». Nous ne détaillons pas ce point dans cet exposé introductif. De là émergea l'idée géniale d'Einstein que c'est la géométrie de l'espace (en chacun de ses points) qui est la gravitation. En acceptant simplement que la métrique associée à cette géométrie ne peut plus être alors à coefficients constants, comme la métrique de Lorentz, mais que ces coefficients dépendent de la répartition de la matière au voisinage du point, on résout le conflit entre gravitation et relativité restreinte. Dans ce qui sera à partir de cette idée la relativité générale, l'espace cesse d'être un réceptacle inerte, accueillant les masses et la gravitation qu'elles engendrent, on ne sait comment. La géométrie devient physique. Le mieux est encore de citer Wheeler sur le lien entre géométrie et gravité : « la masse exerce son emprise sur l'espace en lui dictant sa courbure et l'espace exerce son emprise sur la masse en lui dictant son mouvement. » C'est David Hilbert qui le premier formalisera cette idée dans son article *Die Grundlagen der Physik* paru en novembre 1915 dans les compte-rendus de la *Gesellschaft der Wissenschaften* où l'on trouve (pour la première fois) les équations du champ de gravitation de la relativité générale. Pour conclure, on retiendra ceci : le référentiel privilégié est muni de quatre coordonnées d'espace-temps et équipé d'une métrique de la forme

$$ds^2 = \sum_{i,j \in \{1,2,3,4\}} g_{ij} dx^i dx^j \quad (x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z, x^4 = t)$$

où les g_{ij} dépendent continûment de (x, y, z, t) . L'invariance des lois de la physique est réalisée maintenant par les isométries de cette métrique généralisée.

Des différentes conceptions que nous venons d'évoquer se dégagent deux idées constitutives de la notion d'espace en physique.

- Première idée

L'espace, tout comme un globe terrestre, ne peut être appréhendé globalement, mais au travers de cartes locales : ce sont des produits de la droite réelle ($\mathbb{R}^n$, n est alors la dimension de l'espace) si l'on décide d'attribuer aux points des coordonnées réelles. Plus généralement on pourra considérer comme cartes des ouverts ² de $\mathbb{R}^n$. Ces cartes traduisent la notion de référentiel puisque celui-ci fournit la possibilité d'associer des coordonnées aux points. Il faut pouvoir ensuite déterminer des « changements de cartes » (ou fonctions de recollement) permettant de définir les paires de points qui dans chacune

²Un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une partie de A telle que tout élément de A est centre d'une boule de rayon non nul, entièrement incluse dans A .

des cartes seront identifiés : ils représentent le même objet intrinsèque dont cependant la perception est différente dans chaque carte. On a vu qu'en physique ces fonctions de recollement se définissent comme des éléments du groupe des symétries d'une métrique. Nous verrons que la structure (collection de cartes, fonctions de recollement) permet de définir mathématiquement un objet. Par contre cette construction ne garantit pas grand chose sur la forme de cet espace ; elle peut éventuellement garantir sa forme à une déformation continue près.

Remarque Dans le vocabulaire précis que nous utiliserons plus tard, le terme de carte est en fait désigné par *domaine de carte* le terme de cartes (locales) étant réservé aux couples (domaine de carte, fonction de recollement). Nous réviserons encore la terminologie au moment venu.

- Deuxième idée.

L'idée de la métrique est une option dans la définition de l'espace. Elle est par contre essentielle en physique comme on l'aura compris. La métrique, dont il faudra mettre en œuvre une définition mathématique sur une variété, impose une forme à notre objet dans la mesure où elle définit une *courbure* et une *torsion* (voir chapitre 3).

L'espace-temps de la physique relativiste est une abstraction. De même l'espace à trois dimensions qui constitue notre univers. Et pourtant ce dernier a bien une réalité que l'on peut expérimentalement interroger pour en déterminer la topologie. Comme type d'exploration, on peut examiner des mirages topologiques et espérer (au moins théoriquement) se faire une idée de la topologie de cet univers. Donnons un exemple pour éclairer ce dont il s'agit. Imaginons que l'on vive sur un cylindre $S^1 \times \mathbb{R}$, S^1 désignant le cercle unité de $\mathbb{R}^2$, de centre $(0,0)$. On construit un tel objet à partir de $[0,1] \times \mathbb{R}$ en identifiant (ou en recollant) les points $(0,x)$ et $(1,x)$ pour tous les réels x (voir figure 1.2).

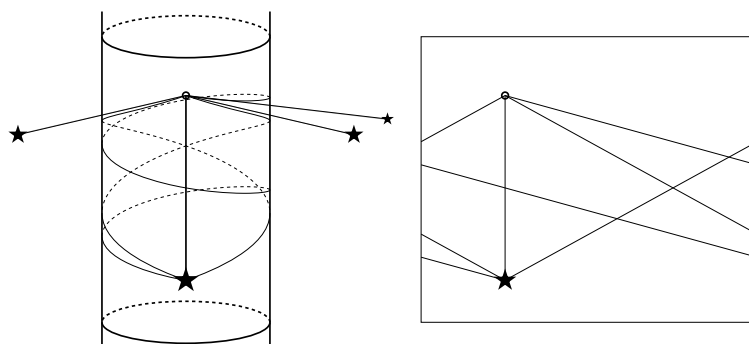


FIG. 1.2 – Cylindre infini

Si une source lumineuse sur ce cylindre émet des photons dont les trajectoires sont des droites (une droite du cylindre est la transformée d'une droite de la bande $[0, 1] \times \mathbb{R}$ dans l'identification précédente), un observateur peut recevoir de la lumière issue de cette source en regardant droit devant lui et en se retournant. Ceci est illustré par les figures (1.2), où l'on a dessiné le cylindre, ainsi que sa représentation plane. Exercice : faire la manipulation avec une feuille de papier rectangulaire. Il saura dans ce cas que la topologie de son espace n'est pas simplement connexe (il ne vit pas dans un plan). Et par un nombre fini de telles expériences, il aura une idée très précise de la topologie de son espace. Par contre il ne saura rien de la courbure. Conformément à ce qui est décrit plus haut sur les principes de la relativité générale, il pourra avoir une idée sur la courbure *localement* en observant des mirages gravitationnels qui font apparaître deux images virtuelles rapprochées d'une même source lumineuse traversant un champ gravitationnel fort (voir figure 1.3).

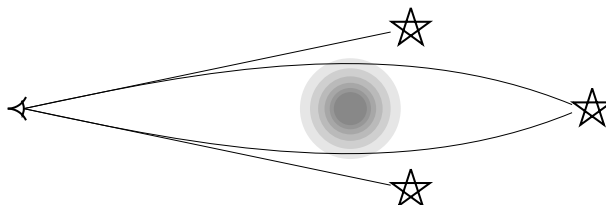


FIG. 1.3 – Mirage gravitationnel

On exigera donc du fait de la réalité des espaces de la physique que le formalisme mathématique fournisse l'existence d'un unique objet, d'un unique espace topologique qui synthétise la collection de cartes locales. Ce qui conforte cette démarche est que les objets géométriques habituels tels que la sphère, le tore etc... peuvent intuitivement s'obtenir par une telle méthode. Par exemple, si on prend deux disques, constituant des domaines de cartes, et qu'on les recolle suivant deux ouverts, conformément à l'indication de la figure (1.4), on obtient topologiquement une sphère.

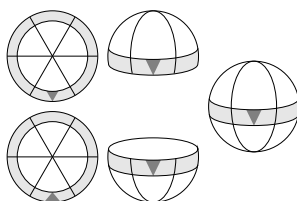


FIG. 1.4 – Recollement