INTRODUCTION

Il y a des ensembles dans le monde qui nous entoure : un troupeau de moutons est un ensemble de moutons, une équipe de football un ensemble de joueurs, une goutte d'eau un ensemble de molécules H_20 et une molécule un ensemble d'atomes. Ce sont des ensembles dont il est d'ailleurs possible, sinon toujours facile, de donner le nombre d'éléments. Le concept d'ensemble est également partout présent en mathématiques, et il en est explicitement question dès l'enseignement secondaire : ensemble de définition d'une fonction ; ensemble des solutions d'une équation ; ensembles de nombres tels que l'ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ des entiers naturels et $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels[1] ; intervalles de $\mathbb{R}$, etc. Mais ce qu'on appelle « théorie des ensembles », même sous son aspect le plus élémentaire, n'est plus enseignée au lycée, en raison de son caractère jugé trop abstrait.

La particularité des mathématiques est de considérer des ensembles infinis, comme le sont les ensembles de nombres ci-dessus. Constituer des ensembles finis, comme un tas de sable, un troupeau de moutons, un paquet de cartes ou $\{0, 1, 2, 3\}$, ne présente pas de difficulté, mais penser des ensembles infinis, leur attribuer un nombre et les manipuler comme on le fait pour d'autres objets mathématiques est beaucoup plus délicat. Faire de la théorie des ensembles le fondement le plus communément admis des mathématiques est l'aboutissement d'un processus de naissance d'un objet mathématique, l'ensemble, qui date du XIX^e^ siècle. C'est cette histoire qu'on va conter ici, en montrant

1. L'ensemble des nombres réels est constitué des nombres rationnels, qui peuvent s'écrire sous forme d'un quotient d'entiers, et des nombres irrationnels, qui ne le peuvent pas, comme $\sqrt{2}$.

comment les mathématiciens se sont peu à peu dégagés des ensembles « concrets » (de nombres, de points) pour en faire un objet « abstrait » (une collection d'éléments dont la nature n'importe pas).

Comme il n'y pas de genèse *ex nihilo* en mathématiques, on fera voir que l'idée d'ensemble est présente, avec ses premières difficultés, chez les savants grecs. Mais ce n'est qu'au XIX^e siècle que Dedekind et Cantor ont fondé une véritable théorie des ensembles (infinis), faisant suite aux travaux de Bolzano et de Riemann. On verra quel lien établir avec les profondes modifications que la logique subit alors, puis comment les problèmes rencontrés ont conduit à réviser la théorie en l'axiomatisant, conformément à un mouvement de formalisation des mathématiques très puissant au tout début du XX^e siècle. On terminera par l'examen de quelques problèmes théoriques traités au siècle dernier.

En même temps que le lecteur comprendra comment la notion d'ensemble est étroitement liée à celles d'infini et de nombre, et comment elle a remplacé cette dernière à titre de notion fondamentale des mathématiques, on espère montrer sur un exemple particulièrement parlant que l'abstraction en mathématiques est le résultat d'une démarche intellectuelle, et non d'une lubie d'une communauté qui se complairait dans l'ésotérisme et la complexité.