Avant-propos

L'auteur de cet ouvrage espère que son travail pourra être utile aux étudiants de PCSI ainsi que, plus généralement, à tous ceux qui commencent des études scientifiques.

Alors que les théories mathématiques sont souvent présentées de manière isolée (c'est-à-dire, si on peut dire, “pour elles-mêmes”), l'auteur a préféré dans ce livre mettre en valeur les liens nombreux et fructueux qu'elles ont avec les autres branches du savoir. C'est pourquoi le lecteur y trouvera de nombreux développements dans des domaines aussi variés que la typographie, la mécanique, l'électronique, la chimie ou la géographie. Sont ainsi présentés, entre autres, le courant triphasé, le calcul des distances sur une sphère, la méthode Potassium-Argon de datation des roches, l'usage des courbes de Bézier en typographie, l'étude des trajectoires dans un champ newtonien et le réglage des antennes paraboliques.

Pour autant, les notions de mathématiques au programme de PCSI sont toutes introduites de manière rigoureuse : par l'enchaînement des définitions et des théorèmes qui constitue la démarche mathématique. Il n'a pas été possible de démontrer tous les résultats, certains dépassant largement le niveau de cet ouvrage. Il en va ainsi, en particulier, de l'image d'un segment par une fonction continue, du théorème de d'Alembert-Gauss, de celui de Darboux, et d'un grand nombre de propriétés sur les déterminants.

Les démonstrations sont rédigées dans un style épuré mais tout à fait rigoureux. Ce style est sans doute celui que l'on est en droit d'attendre d'un étudiant lors d'un concours, aussi bien à l'écrit qu'à l'oral. De nombreuses figures illustrent les raisonnements, même si, bien entendu, une figure ne peut valoir démonstration.

L'auteur espère que son ouvrage aidera le lecteur à apprécier les mathématiques et le rôle considérable qu'elles ont joué pour transformer le monde depuis cinq millénaires.

François Pantigny

Remerciements à tous ceux qui ont aidé l'auteur à corriger les erreurs du manuscrit d'origine, en particulier A. Casamayou, O. Rodot et tous les élèves de la classe PCSI1 du lycée Louis Barthou à Pau.

L'ampoule signale une idée importante à retenir car elle permettra d'éclairer beaucoup de situations par la suite.

Le panneau de danger signale une remarque importante que l'on peut considérer comme une mise en garde adressée au lecteur.

Le panneau de virage dangereux (dessiné comme le Z de Bourbaki), est proche du précédent. Il met en garde le lecteur contre une situation où le débutant a souvent tendance à se tromper, ce qui l'entraîne sur des chemins erronés.

Le thermomètre, dont la température augmente sensiblement, signale une remarque plutôt pointue que le lecteur pourra laisser de côté dans un premier temps.

[Les passages entre crochets correspondent à des éléments de rédaction facultatifs. On les a fait figurer pour faciliter la compréhension mais, dans une situation similaire, on peut considérer qu'un étudiant n'a pas besoin de les faire figurer sur sa copie.]

↯ L'éclair est utilisé pour mettre en garde le lecteur contre une erreur malheureusement trop fréquente. Il est plus explicite qu'un point d'exclamation qui est toujours difficile à utiliser dans un texte mathématique.

¶ Marque un exercice placé en bas de page, après les notes de pied de page, le plus souvent extrêmement facile.

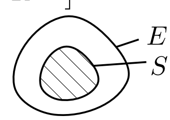
SYSTÈMES D'ÉQUATIONS

I GÉNÉRALITÉS SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS

I.1 Deux méthodes de résolution

Soit $\mathcal{E}$ une équation ou un système d'équations dont on note x l'inconnue.
On suppose que l'équation $\mathcal{E}$ est à résoudre dans un ensemble E

[Dans le cas d'un système de deux équations à deux inconnues x et y, $E = \mathbb{R}^2$]



On note S l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}$ $\quad (S \subset E)$

Résoudre $\mathcal{E}$, c'est déterminer l'ensemble S $\quad$ (des solutions de $\mathcal{E}$)

Deux méthodes de résolution

Méthode par implication – vérification
analyse – synthèse

Soit $x \in S$

x est solution de $\mathcal{E}$
donc $\quad \ldots$
donc $\quad \ldots$
donc $\quad \ldots$
donc $\quad x = x_1 \quad$ ou $\quad x = x_2 \quad$ ou $\ldots$

On a donc démontré que :

si x est solution de $\mathcal{E}$,
alors $\quad x = x_1$ ou x_2 ou $\ldots$

donc $\qquad S \subset \{x_1;\ x_2; \ldots\}$

il faut donc faire une **vérification**
➥ c.-à-d. l'implication dans l'autre sens

Méthode par équivalence

Soit $x \in S$

x est solution de $\mathcal{E}$
$\Leftrightarrow \quad \ldots$
$\Leftrightarrow \quad \ldots$
$\Leftrightarrow \quad \ldots$
$\Leftrightarrow \quad x = x_1 \quad$ ou $\quad x = x_2 \quad$ ou $\ldots$

On a donc démontré que :

$$x \in S \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{x_1;\ x_2; \ldots\}$$

donc $\qquad S = \{x_1;\ x_2; \ldots\}$

Méthode à utiliser de préférence

(on peut utiliser "ssi" au lieu de "$\Leftrightarrow$")

I.2 Exemples d'équations

Exercice

Résoudre l'équation suivante par les deux méthodes $\qquad x-1-\sqrt{2x+1}=0$

Correction

On résout dans $\quad E=\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$

Méthode par implication – vérification

Soit $\quad x\in S$
alors $\quad x-1-\sqrt{2x+1}=0$
alors $\quad x-1=\sqrt{2x+1}$
donc $\quad (x-1)^2=2x+1$
donc $\quad x^2-2x+1=2x+1$
donc $\quad x(x-4)=0$

donc $\quad \begin{cases} x=0 \\ \text{ou} \\ x=4 \end{cases}$

on a montré que $\quad S\subset\{0;4\}$

On vérifie : 4 est solution mais pas 0

$S=\{4\} \qquad$ (S est un singleton[*])

Méthode par équivalence

Soit $\quad x\in\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$

$$\begin{aligned} x\in S \quad &\Leftrightarrow \quad x-1-\sqrt{2x+1}=0 \\ &\Leftrightarrow \quad x-1=\sqrt{2x-1} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases}(x-1)^2=2x-1 \\ x-1\geqslant 0\end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases}x^2=4x \\ x\geqslant 1\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x=4 \end{aligned}$$

donc $\quad S=\{4\}$

Exercice

Résoudre par équivalence l'équation $\qquad \sqrt{-x-1}-x-2=0$

Correction

On s'efforce toujours de résoudre par équivalence, car c'est plus élégant et plus rapide.

Soit $\quad x\in\,]-\infty;-1]$

$$\begin{aligned} \sqrt{-x-1}-x-2=0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{-x-1}=x+2 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases}(-x-1)=(x+2)^2 \\ x+2\geqslant 0\end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases}x^2+5x+5=0 \\ x\geqslant -2\end{cases} \end{aligned}$$

l'équation $\quad x^2+5x+5=0 \quad$ admet 2 racines réelles distinctes[‡] $\begin{cases} \dfrac{-5+\sqrt{5}}{2}\simeq -1.38 \\ \dfrac{-5-\sqrt{5}}{2}\simeq -3.61 \end{cases}$

[*]On appelle *singleton* un ensemble qui ne possède qu'un seul élément. Un ensemble à deux éléments est appelé une *paire*, un ensemble à trois éléments un *trio* (peu usité). Pour les nombres d'éléments supérieurs, il n'y a pas de terme consacré.

L'équation admet donc pour unique solution $\dfrac{-5+\sqrt{5}}{2}$

Exercice

Résoudre par équivalence les équations suivantes :
$x-1=\sqrt{x+1}$ $\quad x+1=\sqrt{x+1}$ $\quad x+2=\sqrt{x+1}$

Correction

- Soit $\quad x \in [-1;+\infty[$

  $$x-1=\sqrt{x+1} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}(x-1)^2=x+1\\ x-1\geqslant 0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}x(x-3)=0\\ x\geqslant 1\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad x=3$$

- $$x+1=\sqrt{x+1} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}(x+1)^2=x+1\\ x+1\geqslant 0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}x^2+x=0\\ x\geqslant -1\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}x=0\\ \text{ou}\\ x=-1\end{cases}$$

- $$x+2=\sqrt{x+1} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}(x+2)^2=x+1\\ x+2\geqslant 0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}x^2+3x+3=0\\ x\geqslant -2\end{cases} \qquad S=\varnothing$$

Exercice

Soit un puits de profondeur h. On laisse tomber une pierre dans le puits et on mesure le temps T écoulé entre le moment où on lâche la pierre et le moment où on entend le bruit de la pierre touchant le fond (y compris le temps que met le bruit pour remonter le puits). On note g l'accélération de la pesanteur et V la vitesse du son.
On veut calculer la profondeur h du puits.

a) Montrer que l'on a la relation $\sqrt{\dfrac{2\boldsymbol{h}}{g}}+\dfrac{\boldsymbol{h}}{V}=T \quad \text{(E)}$

b) Montrer (E) est équivalente à $\begin{cases}h^2-2\left(\dfrac{V^2}{g}+TV\right)h+T^2V^2=0\\ h\leqslant TV\end{cases}$

c) En déduire la valeur de h : $\quad h=TV+\dfrac{V^2}{g}\left(1-\sqrt{1+2\dfrac{Tg}{V}}\right)$

Application à un puits de mine : $\quad T=15\ \text{s} \quad g=9.81\ \text{m s}^{-2} \quad V=300\ \text{m s}^{-1}$

[‡] En mathématiques, le terme "distinct" est synonyme de "différent". Néanmoins, ici, il a une légère connotation supplémentaire : on a parlé de "racines distinctes" par opposition implicite à "racines confondues". En effet, lorsqu'une équation du second degré a un discriminant nul, on a l'habitude de dire qu'elle admet "deux racines confondues" pour traduire l'idée que c'est un peu "par hasard" que les "deux" racines se trouvent être égales. Voir à ce sujet la notion de "racine multiple" dans le chapitre sur les polynômes, à la page 511.

Correction

a) On choisit un repère $(O;\vec{u}_x;\vec{u}_y;\vec{u}_z)$ avec O situé en haut du puits (et $\vec{u}_z$ dirigé vers le haut).

On note $z(t)$ la côte de la pierre à l'instant t

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la pierre donne $m\vec{a} = m\vec{g}$

D'où $\vec{a} = \vec{g}$ $\quad \vec{a}\left|\begin{array}{l}0\\0\\\ddot{z}\end{array}\right.$ $\quad \vec{g}\left|\begin{array}{l}0\\0\\-g\end{array}\right.$

d'où $\ddot{z} = -g \qquad \dot{z} = -gt + A \qquad z = -\frac{1}{2}gt^2 + At + B$

On détermine A et B en utilisant les conditions initiales : à $t = 0$ $\quad z = 0 \quad B = 0$
$\dot{z} = 0 \quad A = 0$

D'où $z = -\frac{1}{2}gt^2$

On a $T = t_1 + t_2$ avec :

- t_1 durée mise par la pierre pour atteindre le fond $\quad \frac{1}{2}gt_1^2 = h \qquad t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$
- t_2 durée mise par le son pour remonter $\quad Vt_2 = h \qquad t_2 = \frac{h}{V}$

On a donc : $\displaystyle \sqrt{\frac{2\boldsymbol{h}}{g}} + \frac{\boldsymbol{h}}{V} = T$ (E) (l'inconnue est $\boldsymbol{h}$)

b) On résout l'équation par équivalence :

$$
\begin{aligned}
\text{(E)} \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{2h}{g}} = T - \frac{h}{V}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{2h}{g} = \left(T - \frac{h}{V}\right)^2 \\ T - \frac{h}{V} \geqslant 0 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{2}{g}h = T^2 - \frac{2T}{V}h + \frac{1}{V^2}h^2 \\ h \leqslant TV \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{V^2}h^2 - \left(\frac{2}{g} + \frac{2T}{V}\right)h + T^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad h \leqslant TV\\
&\Leftrightarrow \quad \underbrace{1}_{a} \cdot h^2 \underbrace{-2\left(\frac{V^2}{g} + TV\right)}_{b} h + \underbrace{T^2V^2}_{c} = 0 \qquad \text{et} \qquad h \leqslant TV
\end{aligned}
$$

Le produit des racines vaut $\frac{c}{a} = T^2V^2 > 0$ les deux racines sont donc de même signe.

La somme des racines vaut $-\frac{b}{a} = 2\left(\frac{V^2}{g} + TV\right) > 0$ les deux racines sont donc positives.

c) On cherche les deux racines de l'équation du second degré obtenue :

$$\Delta = \left[2\left(\frac{V^2}{g}+TV\right)\right]^2 - 4T^2V^2 = 4\left(\frac{V^4}{g^2}+2\frac{TV^3}{g}+T^2V^2\right) - 4T^2V^2 = 4\frac{V^4}{g^2}\left(1+2\frac{Tg}{V}\right)$$

L'équation du second degré admet donc deux solutions h_1 et h_2 avec :

$$h_1 = \frac{2\left(\frac{V^2}{g}+TV\right)+2\frac{V^2}{g}\sqrt{1+2\frac{Tg}{V}}}{2} = TV + \frac{V^2}{g}\left(1+\sqrt{1+2\frac{Tg}{V}}\right)$$

$$h_2 = TV + \frac{V^2}{g}\underbrace{\left(1-\sqrt{1+2\frac{Tg}{V}}\right)}_{\ominus}$$

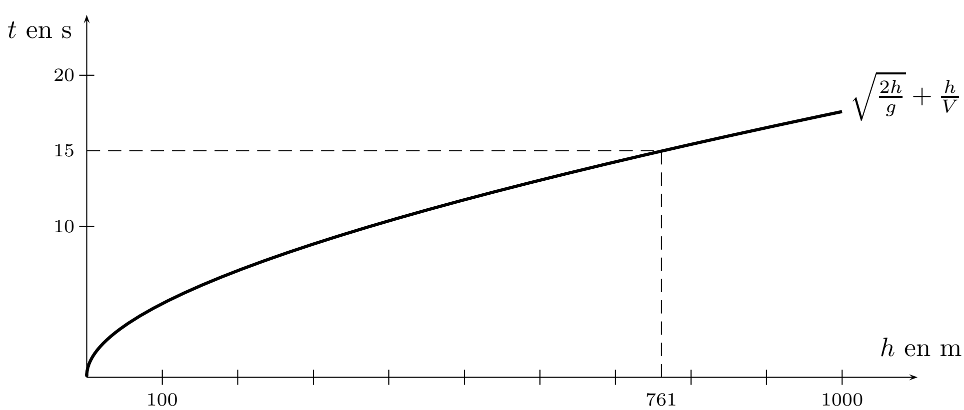
$h_1 > TV$ et $0 \leqslant h_2 \leqslant TV$; (E) admet donc comme unique solution h_2 :

$$\boxed{h = TV + \frac{V^2}{g}\left(1-\sqrt{1+2\frac{Tg}{V}}\right)}$$

Remarque : on aurait aussi pu résoudre l'équation en posant $x = \sqrt{h}$

*Application à un puits de mine** :

$T = 15\ s$ $\quad g = 9.81$ m s^{-2} $\quad V = 300$ m s^{-1} $\qquad$ On obtient $\quad h = 762$ m



le temps t mesuré en fonction de la profondeur h du puits
pour une valeur de t fixée (par exemple 15), correspond bien une seule valeur de h

*Les données fournies peuvent correspondre au puits principal d'une mine de charbon comme il en existait autrefois dans le Nord de la France par exemple.

La courbe ci-dessus est un arc de parabole dont l'axe n'est ni horizontal, ni vertical, mais oblique.
En effet, cette courbe a pour équation : $x^2 - 2Vxy + V^2y^2 - \frac{2V^2}{g} = 0$
Il s'agit de l'équation d'une conique. Le discriminant de cette conique est nul.
Il s'agit donc d'une parabole (cf. p.889 dans le chapitre sur les coniques).

II PRODUIT CARTÉSIEN

II.1 Produit cartésien de deux ensembles

Définition

On appelle *couple* la donnée ordonnée de deux éléments, appelés les *composantes* du couple.

Propriété

deux couples sont égaux ssi leurs composantes correspondantes sont égales
c.-à-d. : $(x;y) = (x';y') \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

Définition

Soit[*] E et F deux ensembles.
On appelle *produit cartésien* de E et F et on note $E \times F$ ("E croix F") l'ensemble de tous les couples de la forme $(x;y)$ où $x \in E$ et $y \in F$

➥ le produit cartésien a été nommé ainsi en hommage à Descartes *(1596–1650)*

Exercice

Soit $E = \{x;y;z\}$ $\qquad F = \{a;b;c;d\}$

a) Ranger dans un tableau tous les éléments de $E \times F$

b) Donner en extension l'ensemble $E \times F$ (c'est-à-dire en énumérant les éléments)

[*] On pourrait, si on le voulait, écrire "soient" (verbe "être" à la troisième personne du pluriel du subjonctif présent) mais il existe aussi une tradition, en mathématiques, d'utiliser le mot "soit" de manière invariable. Nous suivrons cette tradition (cf. Grévisse, *Le bon usage*, 8ème édition, numéro 820).

Correction

a)

$(x;a)$	$(x;b)$	$(x;c)$	$(x;d)$
$(y;a)$	$(y;b)$	$(y;c)$	$(y;d)$
$(z;a)$	$(z;b)$	$(z;c)$	$(z;d)$

b) $E \times F = \{(x;a);(x;b);(x;c);(x;d);(y;a);(y;b);(y;c);(y;d);(z;a);(z;b);(z;c);(z;d)\}$

Remarque :

Le produit cartésien n'est *pas* commutatif : c.-à-d. $E \times F \neq F \times E$ (en général). On donne ci-dessous un exemple qui illustre ce fait ; comme il s'agit d'un exemple destiné à montrer le caractère erroné d'une proposition mathématique, on a l'habitude de désigner un tel exemple sous le nom de *contre-exemple*.

Exercice

Soit $E = \{0;1\}$ $F = \{0;2\}$ Donner en extension $E \times F$ et $F \times E$

Correction

$E \times F = \Big\{(0,0);(0,2);(1,0);(1,2)\Big\}$ $F \times E = \Big\{(0,0);(0,1);(2,0);(2,1)\Big\}$

les ensembles $E \times F$ et $F \times E$ ne sont pas égaux (bien qu'ils aient des éléments en commun)

Définition

Un ensemble E est dit *fini* lorsqu'il ne comporte qu'un nombre fini d'éléments ; ce nombre est alors appelé le *cardinal* de l'ensemble E et est noté $\operatorname{card} E$ ou $\#E$ ou $|E|$

Exemple : si $E = \{a;b;c\}$ alors $\operatorname{card} E = 3$

Propriété

Soit E F deux ensembles finis. On note $n = \operatorname{card} E$ et $p = \operatorname{card} F$

Alors $\operatorname{card}(E \times F) = \operatorname{card}(E) \times \operatorname{card}(F) = np$ *(d'où la notation pour $E \times F$)*

Démonstration

On note $E = \{a_1;a_2;\ldots;a_n\}$
$F = \{b_1;b_2;\ldots;b_p\}$

On range les éléments de $E \times F$ dans un tableau comme ci-contre ➜

$(a_1;b_1)$	$(a_1;b_2)$	$\ldots\ldots$	$(a_1;b_p)$
$(a_2;b_1)$	$(a_2;b_2)$	$\ldots\ldots$	$(a_2;b_p)$
$(a_3;b_1)$	$(a_3;b_2)$	$\ldots\ldots$	$(a_3;b_p)$
$\vdots$			$\vdots$
$(a_n;b_1)$	$(a_n;b_2)$	$\ldots\ldots$	$(a_n;b_p)$

d'où $\operatorname{card}(E \times F) = np$

d'où $\operatorname{card}(E \times F) = (\operatorname{card} E) \cdot (\operatorname{card} F)$

II.2 Produit cartésien de n ensembles

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle *n-uplet* la donnée ordonnée de n éléments, appelés les *composantes* du n-uplet.

Deux n-uplets sont égaux ssi leurs composantes correspondantes sont égales

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E_1\ E_2 \dots E_n$ n ensembles
On appelle *produit cartésien* de $E_1\ E_2 \dots E_n$ (dans cet ordre) l'ensemble de tous les n-uplets de la forme $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ où $x_1 \in E_1 \quad \dots \quad x_n \in E_n$

Cas particulier : soit E un ensemble et $n \in \mathbb{N}^*$ alors $\underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{n\ fois}$ se note E^n

Propriété

- Soit $n \in \mathbb{N}$ et $E_1\ E_2 \dots E_n$ n ensembles finis
  alors $\mathrm{card}(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n) = (\mathrm{card}\, E_1)(\mathrm{card}\, E_2) \cdots (\mathrm{card}\, E_n)$
- Soit $n \in \mathbb{N}$ et E un ensemble fini alors $\mathrm{card}(E^n) = \mathrm{card}(E)^n$

Exercice

Soit $E = \{0; 1\}$ $F = \{0; 2\}$ $G = \{1; 2; 3\}$ donner en extension $E \times F \times G$

Correction

$$E \times F \times G = \Big\{ (0,0,1); (0,0,2); (0,0,3); (0,2,1); (0,2,2); (0,2,3); \\ (1,0,1); (1,0,2); (1,0,3); (1,2,1); (1,2,2); (1,2,3) \Big\}$$

Si on voulait représenter graphiquement le produit cartésien $E \times F \times G$, on serait obligé de construire un tableau à trois dimensions, c'est-à-dire un tableau dans l'espace comme représenté ci-contre en perspective.