

Avant-propos

Michelson en 1881, Michelson et Morley en 1887 montrèrent la constance de la vitesse de la lumière c dans le vide quelle que soit la vitesse du milieu par rapport à l'observateur. Le résultat fut confirmé à maintes reprises par la suite, seule la précision des mesures due à l'amélioration des techniques progressa. Michelson avait donné $c=299\,796 \pm 4$ km/sec près : en 1972 on obtint

$$c=299\,792\,458.7 \pm 1.1 \text{ m/sec près}$$

La "17^e Conférence Générale pour les Poids et Mesures" décida en 1983 : «Le mètre est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de $1/299\,792\,458$ de seconde», alors que Michelson avait proposé depuis longtemps d'utiliser des interféromètres optiques pour mesurer les longueurs...

Dans son article "Sur l'électrodynamique des corps en mouvement", Einstein en 1905 montra l'invariance des équations de Maxwell dans un changement de repères, en supposant que la vitesse de la lumière est la même dans chaque repère, lorsque le changement est donné par une transformation de Lorentz. Il en déduisit la notion de temps propre pour un observateur galiléen et l'intervention de la forme de Minkowski structurant l'espace-temps : ce fut l'arrivée de la relativité.

Au début de l'ouvrage nous reprenons cette démarche en la complétant par des interprétations cinématiques et géométriques. En effet l'invariance des équations de Maxwell, en passant d'un repère à l'autre, montre que les champs électrique et magnétique sont dans les parties spatiales des repères. Les origines des repères coïncidant aux instants initiaux, chacun d'eux est un observateur galiléen de droite d'univers définie par l'axe temporel du repère paramétré par le temps propre. L'espace défini par la partie spatiale du repère est l'espace propre de l'observateur : il est le siège des phénomènes le concernant, en particulier s'y trouvent les champs électrique et magnétique, effets du champ électromagnétique pour cet observateur.

Ce point de vue permet d'aborder aisément dans le deuxième chapitre la relativité restreinte, avec les outils géométriques usuels (calcul vectoriel, algèbre linéaire) : éclaircissement des paradoxes classiques, précisions quant à la composition des vitesses...

Des exemples classiques sont repris avec ce point de vue, traités plus simplement et plus complètement que par des changements de coordonnées.

Dans cette approche vectorielle le centre de masse est défini clairement en introduisant la notion de masse apparente pour un observateur. En outre les collisions et annihilations sont étudiées naturellement.

En électromagnétisme le champ électrique créé par une particule en mouvement s'étudie facilement en passant d'un observateur à l'autre, et le mou-

vement d'une particule chargée se résout en unifiant les divers cas possibles. Géométriquement, la force de Minkowski est fonction linéaire de la quadrivitesse qui lui est orthogonale pour la forme de Minkowski.

On poursuit par l'étude du groupe de Lorentz et de son algèbre de Lie ; il se trouve que le champ électromagnétique correspond à un élément de cette algèbre.

Les propriétés du groupe spécial de Lorentz sont accessibles par l'algèbre de Pauli représentant commodément l'algèbre de Clifford $\mathcal{Cl}_{1,3}$. Par exemple, on obtient aisément les éléments d'une rotation de Thomas par la même démarche que celle qui précise axe et angle d'un produit de rotations par le vecteur d'Olinde Rodrigues.

On rencontre fréquemment dans des ouvrages une matrice fonction d'une autre, comme en [1, 7, 9, 14], et l'on en a vu l'intérêt dans des questions précédentes. Il a semblé utile d'indiquer en annexe une méthode générale à partir de l'algèbre engendrée par la matrice.

Dans une deuxième annexe les quaternions, signalés lors de la présentation de l'algèbre de Pauli, sont rapidement étudiés dans des applications géométriques et cinématiques.

Puis on propose un rapprochement entre l'algèbre de Pauli et les spineurs d'Élie Cartan.

Cet ouvrage s'adresse aux étudiants en Physique et en Mathématiques ; il rétablit une passerelle entre ces deux disciplines en illustrant l'intérêt de la géométrie, au confluent de l'algèbre et de l'analyse. Les connaissances mathématiques utilisées sont très simples et usuelles dans les années de Licence et de Master. L'emploi des formes différentielles est éclairant à propos des équations de Maxwell dans la première partie du premier chapitre, dont on peut admettre le résultat pour la suite.

Au cours de divers séminaires à Besançon puis à Caen, les réflexions et les questions pertinentes de plusieurs collègues m'ont été précieuses. Parmi eux, je remercie Michel Weil, Michel Langlois, Guy Laville et son équipe, Claude Longuemare.

Rappelons l'importance de la recherche fondamentale, essentielle, qui a permis le développement du GPS, application de la Relativité illustrant la constance de la vitesse de la lumière¹.

Je remercie le Professeur Hladik et Madame Corinne Baud des Editions Ellipses pour leur accueil. Un remerciement particulier à mon épouse Josiane pour son précieux soutien.

¹Cédric Foellmi : "Sans théorie de la relativité, pas de GPS. Lettre ouverte d'un jeune astronome à Monsieur le Président de la République", parue dans l'édition du 4 novembre 2007 du journal *Le Monde*.

Chapitre 1

De Maxwell à Minkowski

L'emploi des formes différentielles permet une étude aisée des équations de Maxwell (par exemple l'intervention du quadrivecteur potentiel et les ondes planes) et conduit à leur invariance par le groupe de Lorentz, d'où naturellement l'espace de Minkowski et la cinématique relativiste où temps et espace sont propres à l'observateur : champs électrique et magnétique qui expriment le champ électromagnétique pour cet observateur se trouvent dans cet espace où se situent les phénomènes l'intéressant.

1.1 Équations de Maxwell et formes différentielles

1.1.1 Équations de Maxwell

Les équations de Maxwell s'écrivent

$$\text{rot } \vec{\mathbf{E}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} = 0, \text{ div } \vec{\mathbf{B}} = 0 \quad (1.1)$$

$$\text{rot } \vec{\mathbf{B}} - \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} = 4\pi \vec{\mathbf{J}}, \text{ div } \vec{\mathbf{E}} = 4\pi\rho \quad (1.2)$$

où $\vec{\mathbf{E}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$ désignent les champs électrique et magnétique supposés fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ du temps t et de l'espace, ρ et $\vec{\mathbf{J}}$ les densité de charge et de courant électrique, la vitesse de la lumière étant 1, selon les unités. Il est commode de faire intervenir les formes différentielles d'ordre deux¹. Convenons que dans $\mathbb{R} \times E_3$ l'espace euclidien E_3 soit muni d'une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et posons

$$\Omega_1(\vec{\mathbf{E}}) = e_1 dx + e_2 dy + e_3 dz, \quad \Omega_2(\vec{\mathbf{E}}) = e_1 dy \wedge dz + e_2 dz \wedge dx + e_3 dx \wedge dy$$

¹cf *Harley Flanders* Differential Forms with Applications to the Physical Sciences, Dover 1989

(e_1, e_2, e_3) étant les composantes de $\vec{\mathbf{E}}$ dans cette base, et définissons de même $\Omega_1(\vec{\mathbf{B}})$ et $\Omega_2(\vec{\mathbf{B}})$. Or les expressions des différentielles extérieures des formes précédentes s'interprètent en termes de rotationnel et divergence des champs de vecteurs avec les propriétés de la différentielle extérieure, selon

$$d\Omega_1(\vec{\mathbf{E}}) = \Omega_2(\text{rot } \vec{\mathbf{E}}) + dt \wedge \Omega_1\left(\frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}\right) \quad (1.3)$$

$$d\Omega_2(\vec{\mathbf{E}}) = \text{div } \vec{\mathbf{E}} dx \wedge dy \wedge dz + dt \wedge \Omega_2\left(\frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}\right) \quad (1.4)$$

On obtient des relations analogues en substituant $\vec{\mathbf{B}}$ à $\vec{\mathbf{E}}$.

Considérons les deux formes de degré deux

$$\Sigma = \Omega_2(\vec{\mathbf{B}}) - dt \wedge \Omega_1(\vec{\mathbf{E}}), \quad \tilde{\Sigma} = \Omega_2(\vec{\mathbf{E}}) + dt \wedge \Omega_1(\vec{\mathbf{B}})$$

Un calcul direct, compte tenu de (1.1) et (1.2), montre que

$$d\Sigma = 0, \quad d\tilde{\Sigma} = 4\pi\Omega_3(\rho) - 4\pi dt \wedge \Omega_2(\vec{\mathbf{J}}) \quad \text{avec} \quad \Omega_3(\rho) = \rho dx \wedge dy \wedge dz \quad (1.5)$$

qui sont des relations équivalentes à (1.1) et (1.2).

Munissons $E_4 = \mathbb{R} \times E_3$ de la structure naturelle d'espace vectoriel produit; pour simplifier les écritures identifions $\{0\} \times E_3$ à E_3 et posons

$$\tau = (1, 0, 0, 0) : \text{ ainsi } (\tau, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \text{ est une base de } E_4.$$

Quadripotentiel

La forme différentielle fermée Σ est localement exacte :

$$\Sigma = d\left(-Vdt + \Omega_1(\vec{\mathbf{A}})\right).$$

$-V$ est le potentiel scalaire, $\vec{\mathbf{A}}$ le potentiel vecteur² (à valeurs dans E_3) et $-V\tau + \vec{\mathbf{A}}$ le quadripotentiel. Il permet d'exprimer les champs : de

$$d\left(-Vdt + \Omega_1(\vec{\mathbf{A}})\right) = -\Omega_1(\overrightarrow{\text{grad}} V) \wedge dt + dt \wedge \Omega_1\left(\frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t}\right) + \Omega_2(\text{rot } \vec{\mathbf{A}})$$

on déduit

$$\vec{\mathbf{B}} = \text{rot } \vec{\mathbf{A}}, \quad \vec{\mathbf{E}} = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} \quad (1.6)$$

Explicitons $d\tilde{\Sigma}$ à l'aide du quadripotentiel et en tenant compte de (1.5), puisque

$$d\tilde{\Sigma} = dt \wedge \Omega_2\left(\frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}\right) + \text{div } \vec{\mathbf{E}} dx \wedge dy \wedge dz$$

on en déduit

$$4\pi\rho = \text{div } \vec{\mathbf{E}}, \quad 4\pi\vec{\mathbf{J}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} + \text{rot } \vec{\mathbf{B}}$$

puis

$$4\pi\rho = -\Delta V - \text{div } \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t}, \quad 4\pi\vec{\mathbf{J}} = \overrightarrow{\text{grad}} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{A}}}{\partial t^2} + \text{rot}(\text{rot } \vec{\mathbf{A}})$$

²selon les conventions usuelles.

où ΔV est le laplacien de V (dans E_3). En notant $\vec{A} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{j}$, la première composante de $\text{rot}(\text{rot } \vec{A})$ est $(\partial_i, \partial_{ij})$ étant les dérivées partielles d'ordre un et deux par rapport à x^i et x^i, x^j

$$\partial_2(\partial_1 a_2 - \partial_2 a_1) - \partial_3(\partial_3 a_1 - \partial_1 a_3) = \partial_{12} a_2 + \partial_{13} a_3 - (\partial_{22} a_1 + \partial_{33} a_1)$$

soit

$$\begin{aligned} & (\partial_{11} a_1 + \partial_{12} a_2 + \partial_{13} a_3) - (\partial_{11} a_1 + \partial_{22} a_1 + \partial_{33} a_1) \\ \text{d'où } \text{rot}(\text{rot } \vec{A}) &= \overrightarrow{\text{grad}} \text{div } \vec{A} - \Delta \vec{A}. \quad \vec{J} \text{ s'écrit} \\ 4\pi \vec{J} &= \left(\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \Delta \vec{A} \right) + \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \text{div } \vec{A} \right). \end{aligned}$$

Or sans changer Σ on peut ajouter à $-Vdt + \Omega_1(\vec{A})$ la différentielle d'une fonction ϕ (car $d^2\phi$ est nulle) et remplacer $(\vec{A}, V)$ par

$$(\vec{A}_1 = \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}} \phi, V_1 - \frac{\partial \phi}{\partial t}).$$

Précisons ϕ de sorte que $\frac{\partial V_1}{\partial t} + \text{div } \vec{A}_1 = 0$ (condition de jauge) soit :

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \text{div } \vec{A} + \Delta \phi = 0 \text{ ou encore } \square \phi = \frac{\partial V}{\partial t} + \text{div } \vec{A}$$

en faisant intervenir le d'Alembertien de ϕ .

Avec ce choix du quadripotentiel, ρ et $\vec{J}$ sont donnés en séparant potentiel scalaire et potentiel vecteur par

$$4\pi\rho = \square V_1, \quad 4\pi \vec{J} = \square \vec{A}_1.$$

Remarque. Puisque $d^2\tilde{\Sigma}$ est nulle, les charges vérifient selon (1.5)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz - dt \wedge d\Omega_2(\vec{J}) = 0 \text{ ou encore} \\ & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{J} = 0 : \text{ c'est la conservation de la charge.} \end{aligned}$$

1.1.2 Ondes planes

Supposons le champ électromagnétique sans charges extérieures, et vérifions que ce champ peut exister avec champ électrique et magnétique de directions constantes (au signe près!), c'est à dire de la forme où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs unitaires fixes, et h et k des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

$$\vec{E} = e\vec{u}, \quad \vec{B} = b\vec{v}.$$

Ainsi $\Sigma = b\Omega_2(\vec{v}) - edt \wedge \Omega_1(\vec{u})$, $\tilde{\Sigma} = e\Omega_2(\vec{u}) + bdt \wedge \Omega_1(\vec{v})$.

Leurs différentielles extérieures étant nulles

$$\begin{cases} \frac{\partial b}{\partial t} dt \wedge \Omega_2(\vec{v}) + \Omega_1(\overrightarrow{\text{grad}} b) \wedge \Omega_2(\vec{v}) - \Omega_1(\overrightarrow{\text{grad}} e) \wedge dt \wedge \Omega_1(\vec{u}) &= 0 \\ \frac{\partial e}{\partial t} dt \wedge \Omega_2(\vec{u}) + \Omega_1(\overrightarrow{\text{grad}} e) \wedge \Omega_2(\vec{u}) + \Omega_1(\overrightarrow{\text{grad}} b) \wedge dt \wedge \Omega_1(\vec{v}) &= 0 \end{cases}$$

soit en séparant les termes en dt des autres

$$\begin{cases} \frac{\partial b}{\partial t} \Omega_2(\vec{v}) + \Omega_1(\overrightarrow{\text{grad}} e) \wedge \Omega_1(\vec{u}) = 0 & , \quad \Omega_1(\overrightarrow{\text{grad}} b) \wedge \Omega_2(\vec{v}) = 0 \\ \frac{\partial e}{\partial t} \Omega_2(\vec{u}) - \Omega_1(\overrightarrow{\text{grad}} b) \wedge \Omega_1(\vec{v}) = 0 & , \quad \Omega_1(\overrightarrow{\text{grad}} e) \wedge \Omega_2(\vec{u}) = 0 \end{cases}$$

Ainsi puisque $\Omega_1(\vec{X}) \wedge \Omega_1(\vec{Y}) = \Omega_2(\vec{X} \wedge \vec{Y})$, $\Omega_1(\vec{X}) \wedge \Omega_2(\vec{X}) = \Omega_3(\vec{X} \cdot \vec{Y})$

$$\begin{cases} \frac{\partial b}{\partial t} \vec{v} + \overrightarrow{\text{grad}} e \wedge \vec{u} = 0 & , \quad \overrightarrow{\text{grad}} b \cdot \vec{v} = 0 \\ \frac{\partial e}{\partial t} \vec{u} - \overrightarrow{\text{grad}} b \wedge \vec{v} = 0 & , \quad \overrightarrow{\text{grad}} e \cdot \vec{u} = 0 \end{cases}$$

On en déduit, par multiplication scalaire et vectorielle de ces relations respectivement par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, en excluant les champs constants :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0, \quad \overrightarrow{\text{grad}} b = \frac{\partial e}{\partial t} \vec{v} \wedge \vec{u}, \quad \overrightarrow{\text{grad}} e = \frac{\partial b}{\partial t} \vec{v} \wedge \vec{u}.$$

En complétant $(\vec{u}, \vec{v})$ par $\vec{w}$ de sorte que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une base orthonormée directe de E_3 , en y notant x', y', z' les composantes d'un vecteur, les relations précédentes s'écrivent

$$\begin{cases} \partial_{x'} b \vec{u} + \partial_{y'} b \vec{v} + \partial_{z'} b \vec{w} & = -\partial_t e \vec{w} \\ \partial_{x'} e \vec{u} + \partial_{y'} e \vec{v} + \partial_{z'} e \vec{w} & = -\partial_t b \vec{w} \end{cases}$$

soit $\partial_{x'} b = \partial_{y'} b = \partial_{x'} e = \partial_{y'} e = 0$, $\partial_{z'} b = -\partial_t e$ et $\partial_{z'} e = -\partial_t b$.

Ainsi e et b ne dépendent que de t et z' et vérifient

$$\partial_{t^2} e - \partial_{z'^2} e = 0, \quad \partial_{t^2} b - \partial_{z'^2} b = 0 : \text{leur d'Alembertien est nul.}$$

On en déduit que e est de la forme $e = f(t - z') + g(t + z')$. Et avec $\partial_t b = -\partial_{z'} e$, $\partial_{z'} b = -\partial_t e$: $b = f(t - z') - g(t + z')$ (a priori s'introduit pour b , à partir de e , une constante a et il suffit de remplacer f par $f - a/2$ et g par $g + a/2$ pour obtenir les expressions précédentes de e et b à partir de deux fonctions seulement – sans constante dans l'expression de b).

F et G étant deux primitives de f et g on vérifie immédiatement

$$\Sigma = d[(F(t - z') + G(t + z'))dx']$$

d'où le quadripotentiel : $V=0$, $\vec{A} = [F(t - z') + G(t + z')] \vec{u}$, et la condition de jauge est satisfaite.

Propagations. On peut considérer l'onde trouvée comme somme de deux ondes, la linéarité des équations permettant d'envisager leur superposition :

- l'une correspondant à $e = b = f(t - z')$,
- l'autre à $e = -bg(t + z')$.

La première se propage selon $\vec{n} = \vec{w}$ à la vitesse de la lumière (onde

progressive) car son état en (t, x', y', z') est en $(t + \Delta t, x', y', z' + v \cdot \Delta t)$ ssi $v = 1$; on a $\vec{\mathbf{B}} = \vec{n} \wedge \vec{\mathbf{E}}$, et le champ est singulier : $\vec{\mathbf{E}}^2 = \vec{\mathbf{B}}^2$, $\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$.

Pratiquement on prend $e = b = f(\omega t - \vec{e} \cdot \vec{r})$, ω étant la pulsation et $\vec{e} = \omega \vec{n}$ le *vecteur propagation de l'onde*, et $f = a \cos$ (ou $\sin$) pour une onde sinusoïdale monochromatique.

De manière analogue on voit que la seconde se propage selon $\vec{n} = -\vec{w}$, à la vitesse de la lumière (onde régressive) et on a toujours $\vec{\mathbf{B}} = \vec{n} \wedge \vec{\mathbf{E}}$.

1.2 Groupe de Lorentz

Que deviennent les équations de Maxwell dans un changement de base de $\mathbb{R} \times E_3$? Il est commode d'utiliser les formes $\Sigma, \tilde{\Sigma}$ et Ω .

1. Si le changement ne porte que sur la base de E_3 , on vérifie qu'apparaissent les composantes de $\vec{\mathbf{E}}$, $\vec{\mathbf{B}}$ et $\vec{\mathbf{J}}$ dans cette nouvelle base, *pourvu qu'elle soit elle aussi orthonormée directe ou non* (dans ce dernier cas, il y a changement de l'orientation du vecteur "axial" $\vec{\mathbf{B}}$).

Considérons le changement de base $\psi : \mathcal{B} = (\tau, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \implies \mathcal{B}' = (\tau', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ où la variable t est inchangée :

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

A permet d'exprimer les composantes de vecteurs de E_3 dans $\mathcal{B}'$ à l'aide de leurs composantes dans $\mathcal{B}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \text{ d'où } \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} dx' \\ dy' \\ dz' \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} dy \wedge dz \\ dz \wedge dx \\ dx \wedge dy \end{pmatrix} = A^c \begin{pmatrix} dy' \wedge dz' \\ dz' \wedge dx' \\ dx' \wedge dy' \end{pmatrix}$$

A^c étant la coadjointe de A . En notant

$\psi^* \Sigma = b'_1 dy' \wedge dz' + b'_2 dz' \wedge dx' + b'_3 dx' \wedge dy' - dt \wedge (e'_1 dx' + e'_2 dy' + e'_3 dz')$ on en déduit

$$\begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \end{pmatrix} = {}^t A^c \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{pmatrix} = {}^t A \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

(e'_1, e'_2, e'_3) sont les composantes de $\vec{\mathbf{E}}$ dans $\mathcal{B}'$; notons $\vec{\mathbf{B}}'$ le vecteur de composantes (h'_1, h'_2, h'_3) dans $\mathcal{B}'$: ainsi

$$\psi^* \Sigma = \Omega'_2(\vec{\mathbf{B}}') - dt \wedge \Omega'_1(\vec{\mathbf{E}}'),$$

Ω'_1 et Ω'_2 étant exprimées avec les variables x', y', z' et leurs différentielles.

De manière analogue à partir de

$\psi^* \tilde{\Sigma} = e''_1 dy' \wedge dz' + e''_2 dz' \wedge dx' + e''_3 dx' \wedge dy' + dt \wedge (b''_1 dx' + b''_2 dy' + b''_3 dz')$ il vient

$$\begin{pmatrix} e''_1 \\ e''_2 \\ e''_3 \end{pmatrix} = {}^t A^c \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} b''_1 \\ b''_2 \\ b''_3 \end{pmatrix} = {}^t A \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Et (b''_1, b''_2, b''_3) sont les composantes de $\vec{\mathbf{B}}$ dans $\mathcal{B}'$; notons $\vec{\mathbf{E}}''$ le vecteur de composantes (e''_1, e''_2, e''_3) dans cette base : ainsi

$$\psi^* \tilde{\Sigma} = \Omega'_2(\vec{\mathbf{E}}'') + dt \wedge \Omega'_1(\vec{\mathbf{B}}).$$

Si les équations de Maxwell sont invariantes dans le changement de base, il existe nécessairement un réel k tel que $\vec{\mathbf{E}}'' = k \vec{\mathbf{E}}$, $\vec{\mathbf{B}} = k \vec{\mathbf{B}}''$ soit selon leurs expressions dans la nouvelle base : ${}^t\mathbf{A}^c = k {}^t\mathbf{A}$, ${}^t\mathbf{A} = k {}^t\mathbf{A}^c$ donc $k^2 = 1$. Par ailleurs selon la propriété de la coadjointe (donnant l'inverse de la matrice) : $\mathbf{A} {}^t\mathbf{A}^c = (\det \mathbf{A}) \mathbf{I}$ d'où $\det {}^t\mathbf{A}^c = (\det \mathbf{A})^2$. Et de ${}^t\mathbf{A}^c = k {}^t\mathbf{A}$ on déduit alors $k \det \mathbf{A} = 1$. Ainsi $k = \det \mathbf{A} = \pm 1$: la matrice $\mathbf{A}$ est orthogonale.

Puisque $\psi^* \Omega_3(\rho) = \det \mathbf{A} \Omega'_2(\rho)$, les équations de Maxwell s'écrivent en termes de formes différentielles, et en divisant les deux membres de la seconde par $\det \mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} d\left(\Omega'_2(\det \mathbf{A} \cdot \vec{\mathbf{B}}) - dt \wedge \Omega'_1(\vec{\mathbf{E}})\right) &= 0 \\ d\left(\Omega'_2(\vec{\mathbf{E}}) - dt \wedge \Omega'_1(\det \mathbf{A} \cdot \vec{\mathbf{B}})\right) &= 4\pi \Omega'_3(\rho) - 4\pi \Omega'_2(\vec{\mathbf{J}}) \end{aligned}$$

Si $\mathbf{A}$ est orthogonale directe, $(\vec{\mathbf{E}}, \vec{\mathbf{B}})$ sont conservés ; dans le cas contraire $\vec{\mathbf{E}}' = \vec{\mathbf{E}}$ mais $\vec{\mathbf{B}}' = -\vec{\mathbf{B}}$: le champ magnétique est "axial". Dans les deux cas ρ et $\vec{\mathbf{J}}$ sont conservés.

2. Si le changement de base porte aussi sur la partie temporelle, on peut se limiter, d'après ce qui précède, à un changement portant sur les deux premiers vecteurs, c'est-à-dire en explicitant le changement de composantes :

$$\mathcal{B} = (\tau, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \implies \mathcal{B}' = (\tau', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}) :$$

$$\tau' = \gamma\tau + \beta\vec{i}, \vec{i}' = \alpha\tau + \delta\vec{i}, \vec{j}' = \vec{j}, \vec{k}' = \vec{k} \quad (1.7)$$

d'où $\varphi : (t', x', y', z') \mapsto (t, x, y, z)$ telle que

$$t = \gamma t' + \alpha x', x = \beta t' + \delta x', y = y', z = z' \text{ et posons } D = \gamma\delta - \alpha\beta \quad (1.8)$$

Notons E_τ et $E_{\tau'}$ les espaces de bases $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $(\vec{i}', \vec{j}, \vec{k})$, supposées orthonormées et orientant E_τ et $E_{\tau'}$. Complétées par τ et τ' , ce sont des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de $E = \mathbb{R}\tau \oplus E_\tau$ ou $\mathbb{R}\tau' \oplus E_{\tau'}$.

Écrivons Σ et $\tilde{\Sigma}$ dans cette base $\mathcal{B}'$ soit $\varphi^* \Sigma$ et $\varphi^* \tilde{\Sigma}$. Il vient par un calcul simple (avec les propriétés du produit extérieur)

$$\begin{aligned} \varphi^* \Sigma &= b_1 dy' \wedge dz' + (\delta b_2 + \alpha e_3) dz' \wedge dx' + (\delta b_3 - \alpha e_2) dx' \wedge dy' \\ &\quad - dt' \wedge [\Delta e_1 dx' + (\gamma e_2 - \beta b_3) dy' + (\gamma e_3 + \beta b_2) dz'] \end{aligned}$$

Deux nouveaux champs de vecteurs $\vec{\mathbf{E}}'$ et $\vec{\mathbf{B}}'$ se présentent, de composantes (dans la nouvelle base) s'exprimant à partir de celles de $\vec{\mathbf{E}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$ dans l'ancienne base selon, avec $\psi^* \Sigma = \Omega_2(\vec{\mathbf{B}}') - dt \wedge \Omega_1(\vec{\mathbf{E}}')$

$$\begin{cases} b'_1 &= b_1 \\ b'_2 &= \delta b_2 + \alpha e_3 \\ b'_3 &= \delta b_3 - \alpha e_2 \end{cases} \quad \begin{cases} e'_1 &= D e_1 \\ e'_2 &= \gamma e_2 - \beta b_3 \\ e'_3 &= \gamma e_3 + \beta b_2 \end{cases}$$

Ainsi $\vec{\mathbf{B}}'$ et $\vec{\mathbf{E}}'$ s'expriment dans $\mathcal{B}'$ selon

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{B}}' &= b_1 \vec{i}' + (\delta b_2 + \alpha e_3) \vec{j}' + (\delta b_3 - \alpha e_2) \vec{k}' \\ \vec{\mathbf{E}}' &= D e_1 \vec{i}' + (\gamma e_2 - \beta b_3) \vec{j}' + (\gamma e_3 + \beta b_2) \vec{k}'\end{aligned}$$

et dans $\mathcal{B}$ compte-tenu de $\vec{i}' = \alpha \tau + \delta \vec{i}$, en posant $\vec{\alpha} = \alpha \vec{i}$, $\vec{\beta} = \beta \vec{i}$

$$\vec{\mathbf{B}}' = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\mathbf{B}}) + \delta \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{E}} \wedge \vec{\alpha}, \quad \vec{\mathbf{E}}' = D(\vec{\alpha} \cdot \vec{\mathbf{E}}) + \gamma \vec{\mathbf{E}} - \vec{\mathbf{B}} \wedge \vec{\beta}$$

Exprimons $\varphi^* \tilde{\Sigma}$: apparaissent deux vecteurs $\vec{\mathbf{E}}''$ et $\vec{\mathbf{B}}''$ dont on obtient les composantes à partir de $\tilde{\Sigma} = \Omega_2(\vec{\mathbf{E}}) + dt \wedge \Omega_1(\vec{\mathbf{B}})$, mais que l'on trouve sans calculs supplémentaires en remarquant que l'on passe de Σ à $\tilde{\Sigma}$ en changeant $\vec{\mathbf{B}}$ en $\vec{\mathbf{E}}$ et $\vec{\mathbf{E}}$ en $-\vec{\mathbf{B}}$, ce qui donne

$$\begin{cases} e_1'' = e_1 \\ e_2'' = \delta e_2 - \alpha b_3 \\ e_3'' = \delta e_3 + \alpha b_2 \end{cases} \quad \begin{cases} b_1'' = D b_1 \\ b_2'' = \gamma b_2 + \beta e_3 \\ b_3'' = \gamma b_3 - \beta e_2 \end{cases}$$

d'où dans $\mathcal{B}'$ comme précédemment

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{E}}'' &= e_1 \vec{i}' + (\delta e_2 - \alpha b_3) \vec{j}' + (\delta e_3 + \alpha b_2) \vec{k}' \\ \vec{\mathbf{B}}'' &= D b_1 \vec{i}' + (\gamma b_2 + \beta e_3) \vec{j}' + (\gamma b_3 - \beta e_2) \vec{k}'\end{aligned}$$

Enfin $\varphi^*(\Omega_3(\rho) - dt \wedge \Omega_2(\vec{\mathbf{J}}))$ s'écrit $\Omega'_3(\rho') - dt' \wedge \Omega'_2(\vec{\mathbf{J}}')$ avec

$$\rho' = \delta \rho - \alpha j_1, \quad \begin{cases} j_1' = -\beta \rho + \gamma j_1 \\ j_2' = D j_2 \\ j_3' = D j_3 \end{cases}$$

Remarquons qu'en posant *dans E*

$$\vec{\mathbf{J}} = \rho \tau + j_1 \vec{i} + j_2 \vec{j} + j_3 \vec{k}, \quad \vec{\mathbf{J}}' = \rho' \tau' + j_1' \vec{i}' + j_2' \vec{j}' + j_3' \vec{k}'$$

les relations précédentes se condensent en $\vec{\mathbf{J}}' = D \vec{\mathbf{J}}$.

Dans cette base les équations de Maxwell (1.1) et (1.2) s'écrivent

$$\text{rot } \vec{\mathbf{E}}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{B}}'}{\partial t'} = 0, \quad \text{div } \vec{\mathbf{B}}' = 0 \quad (1')$$

$$\text{rot } \vec{\mathbf{B}}'' - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}''}{\partial t'} = 4\pi \vec{\mathbf{J}}', \quad \text{div } \vec{\mathbf{E}}'' = 4\pi \rho' \quad (2'')$$

Le changement de bases est compatible avec le champ électromagnétique si ces deux groupes d'équations correspondent au même champ ou s'y amènent, c'est-à-dire en considérant leurs composantes selon $\vec{i}'$

si $\vec{\mathbf{E}}' = k \vec{\mathbf{E}}''$, $\vec{\mathbf{B}}' = k \vec{\mathbf{B}}''$ d'où $k = D$, $1 = kD \Rightarrow k = D = \varepsilon(\pm 1)$

Ainsi (ici le coefficient β n'est pas celui souvent utilisé vérifiant la relation $\gamma^2(1 - \beta^2) = 1$)

$$\delta = \varepsilon \gamma, \quad \alpha = \varepsilon \beta, \quad \gamma^2 - \beta^2 = 1 \quad \text{avec } \varepsilon = \pm 1 \quad (1.9)$$

et les champs électrique et magnétique s'expriment dans $\mathcal{B}$ avec $\vec{\beta} = \beta \vec{i}$ selon

$$\vec{\mathbf{E}}' = (\varepsilon \vec{\beta} \cdot \vec{\mathbf{E}}) \tau + \gamma \vec{\mathbf{E}} + \vec{\beta} \wedge \vec{\mathbf{B}}, \quad \vec{\mathbf{B}}' = (\vec{\beta} \cdot \vec{\mathbf{B}}) \tau + \varepsilon \gamma \vec{\mathbf{B}} - \varepsilon \vec{\beta} \wedge \vec{\mathbf{E}}. \quad (1.10)$$

Discutons selon le signe de $\varepsilon = \pm 1$ et celui de γ vérifiant $\gamma^2 = 1 + \beta^2$, ce qui conduit à préciser les orientations temporelle (droite dirigée par τ et celle dirigée par τ') et spatiale (espaces E_τ et $E_{\tau'}$).

Orientations

Selon la dernière relation de (1.9), que vérifient aussi α et δ , il est naturel de faire intervenir les lignes hyperboliques et de poser (ε_1 et ε_2 valant ± 1)

$$\begin{cases} \gamma = \varepsilon_1 \operatorname{ch} \varphi & , & \beta = \varepsilon_1 \operatorname{sh} \varphi \\ \alpha = \varepsilon_2 \operatorname{sh} \varphi & , & \delta = \varepsilon_2 \operatorname{ch} \varphi \end{cases} \quad (\varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_2)$$

• On vérifie immédiatement la structure de groupe de ces changements de base. Celui que l'on considère a pour matrice

$$L_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1}(\varphi) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \operatorname{ch} \varphi & \varepsilon_1 \operatorname{sh} \varphi \\ \varepsilon_1 \operatorname{sh} \varphi & \varepsilon_2 \operatorname{ch} \varphi \end{pmatrix}$$

et l'on vérifie par un calcul direct (ch et sh étant paire et impaire)

$$L_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1}(\varphi) L_{\varepsilon_2'}^{\varepsilon_1'}(\varphi') = L_{\varepsilon_2 \varepsilon_2'}^{\varepsilon_1 \varepsilon_1'}(\varphi' + \varepsilon_1' \varepsilon_2' \varphi)$$

En particulier

$$L_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1}(\varphi) = L_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1}(0) L_1^1(\varphi), \quad L_1^1(0) = I, \quad \left(L_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1}(\varphi) \right)^{-1} = L_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1}(-\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varphi)$$

La matrice $L_1^1(\varphi)$ est une matrice de Lorentz réduite selon le terme usuel.

• Considérons la matrice $L_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1}(\varphi)$, matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, et considérons φ comme paramètre, $\mathcal{B}'$ étant notée $\mathcal{B}'_\varphi$. Lorsque φ tend vers 0

$$L_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1}(\varphi) \rightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \quad \text{donc } \mathcal{B}'_\varphi \rightarrow \mathcal{B}'_0 = (\varepsilon_1 \tau, \varepsilon_2 \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$$

Dans $\mathcal{B}$ τ oriente le temps t et dans $\mathcal{B}'_\varphi$ τ' oriente t' et par continuité l'orientation temporelle de $\mathcal{B}'_\varphi$ et celle de $\mathcal{B}'_0$ (donnée par $\varepsilon_1 \tau$ sont les mêmes : si $\varepsilon_1 = 1$ $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ont même orientation temporelle, si $\varepsilon_1 = -1$ elles sont opposées).

De manière analogue, $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (qui engendre E_τ) oriente l'espace de $\mathcal{B}$ et $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ (qui engendre $E_{\tau'}$) celui de $\mathcal{B}'$ qui est toujours par continuité celui de $\mathcal{B}'_0$ donné par $(\varepsilon_2 \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: si $\varepsilon_2 = 1$ $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ont même orientation spatiale, sinon elles sont opposées.

Dans certains ouvrages, on discute selon $\varepsilon_1 = \operatorname{sgn} \gamma$ et $\Delta = \varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_2$.

Il est plus naturel de discuter selon le signe de γ et celui de γD :

$\operatorname{sgn} \gamma$	$\operatorname{sgn} \gamma = 1$ $\operatorname{sgn} \gamma = -1$	même orientation temporelle orientations temporelles opposées
$\operatorname{sgn} \gamma D$	$\operatorname{sgn} \gamma D = 1$ $\operatorname{sgn} \gamma D = -1$	même orientation spatiale orientations spatiales opposées

On retrouve les résultats du 1 lorsque le changement de coordonnées n'est que spatial.

Les équations (1') et (2'') s'écrivent en termes de $(\vec{E}', \vec{B}' \text{ et } \vec{J}')$.

Par définition les changements de bases, qui conservent les équations de Maxwell, forment un groupe : le *groupe de Lorentz* $\mathcal{L}$. Si les orientations spatiale et temporelle sont conservées, ils forment le sous-groupe $\mathcal{L}^+$ appelé *groupe spécial de Lorentz*.

1.3 Interprétations géométrique et cinématique

1.3.1 Métrique de Minkowski

(x, t) et (x', t') étant liés par (1.8) :

$$\begin{aligned} t^2 - x^2 &= \gamma^2 t'^2 + 2\alpha\gamma t'x' + \alpha^2 x'^2 - (\beta^2 t'^2 + 2\delta\beta t'x' + \delta^2 x'^2) \\ &= (\gamma^2 - \beta^2)t'^2 + 2(\alpha\gamma - \delta\beta)t'x' - (\alpha^2 - \delta^2)x'^2 \\ \text{soit } t^2 - \bar{x}^2 &= t'^2 - \bar{x}'^2 \end{aligned}$$

si et seulement si

$$\gamma^2 - \beta^2 = 1, \alpha\gamma - \delta\beta = 0, \alpha^2 - \delta^2 = 1$$

γ n'étant pas nul, $\alpha = \delta\beta/\gamma$ et on voit que la condition revient à (1.9).

Bien entendu lorsque le changement de base conserve le temps et change une base orthornormée de E_3 en une autre de même nature, ce ne peut être que par une isométrie.

Par définition, la forme quadratique

$$\mathcal{Q}(t\tau + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

est la *forme de Minkowski* et l'espace vectoriel réel de dimension quatre E_4 muni de cette forme quadratique est l'*espace de Minkowski*.

On vérifiera par la suite que les endomorphismes de E_4 la conservant sont de l'un des deux types précédent ou le produit de deux de chaque type.

Une base telle que $\mathcal{B} = (\tau, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ intervenant précédemment est dite $\mathcal{Q}$ -orthonormée si

$$\mathcal{Q}(\tau) = 1, \mathcal{Q}(\vec{i}) = -1, \mathcal{Q}(\vec{j}) = -1, \mathcal{Q}(\vec{k}) = -1$$

Notons alors E_τ le sous espace engendré par $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: c'est un espace euclidien de forme (euclidienne) la restriction de $-\mathcal{Q}$.

Φ étant la forme bilinéaire symétrique associée à $\mathcal{Q}$, remarquons que E_τ et $\mathbb{R}\tau$ sont Φ -orthogonaux et que E_4 est la somme directe $\mathcal{Q}$ -orthogonale $\mathbb{R}\tau \oplus E_\tau$.

On peut considérer dans cette base de $\mathbb{R}\tau \oplus E_\tau$ le vecteur propagation d'une onde monochromatique à partir de son vecteur d'onde $\vec{n}$ unitaire de E_τ , défini à la fin de §3, soit $\nu = \omega(\tau + \vec{n})$. Ce vecteur vérifie $\mathcal{Q}(\nu) = 0$ —on dit qu'il est isotrope, et le scalaire $\omega(t - \vec{r} \cdot \vec{n})$ figurant dans l'expression des champs n'est autre que $\Phi(\nu, t\tau + \vec{r})$, $t\tau + \vec{r}$ étant le point de $\mathbb{R}\tau \times E_\tau$ où l'on évalue l'onde.

1.3.2 Interprétation cinématique

Définissons *l'espace-temps (l'univers)* comme l'espace affine $\mathcal{E}$ d'espace directeur E_4 issu du point $O_0 : \mathcal{R} = (O_0, \tau, \mathcal{B})$ est un repère de $\mathcal{E}$ considéré comme celui du "laboratoire" à l'instant $t = 0$; lorsque t varie, le point $O_t = O_0 + t\tau$ (avec les notations affines) décrit une droite dans $\mathcal{E}$, *droite d'univers* de l'observateur O dont t est le *temps propre*.

Un point de l'univers est appelé *événement*, et tout observateur de ligne d'univers une droite est dit galiléen : O est un *observateur galiléen*.

Considérons un changement de repère $\mathcal{R}' = (O_0, \tau', \mathcal{B}')$ défini par (7.4) avec $\gamma > 1$. Le changement de base est donné par un élément du groupe spécial de Lorentz.

Notons O'_0 le point coïncidant avec O_0 origine du repère $\mathcal{R}'$. Le point $O'_{t'} = O_0 + t'\tau'$ décrivant une droite d'univers est aussi un observateur galiléen de temps propre t' .

$\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ étant toujours $(\tau, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $\mathcal{B}' = (\tau', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$, quel est le mouvement de O' par rapport à O ? A l'instant t' du temps propre de O' , les coordonnées de $O'_{t'}$ dans $\mathcal{R}'$ étant $(t', 0, 0, 0)$, celles dans $\mathcal{R}$ sont

$$t = \gamma t', \quad x = \beta t', \quad y = 0, \quad z = 0 \quad \text{soit} \quad x = \frac{\beta}{\gamma} t$$

puisque t est le temps propre de O : à cet instant (pour O) celui-ci voit O' sur la droite $\Delta_t = O_t + \mathbb{R}\vec{i}$, au point d'abscisse $x(t) = \frac{\beta}{\gamma} t$, car

$$O'_{t'} = O'_0 + t'\tau' = O_0 + t'(\gamma\tau + \beta\vec{i}) \quad \text{soit} \quad O'_{t'} = O_{\gamma t'} + t'\beta\vec{i} = O_t + \frac{\beta}{\gamma} t\vec{i}.$$

Bref pour O , O' a un mouvement apparent rectiligne uniforme de vitesse $\vec{v} = \frac{\beta}{\gamma}\vec{i}$ que l'on note $\vec{v} = v\vec{i}$. Puisque $\Delta = \gamma^2(1 - v^2) = 1 : |v| < 1$ (la vitesse de la lumière vaut 1).

Il est naturel de considérer le sous-espace affine $O_t + E_3$ (où se trouve la droite Δ_t) comme l'espace de O à l'instant t de son temps propre : *son espace propre* (ou *son espace* plus brièvement).

Les relations (1.7) s'inversent facilement avec la condition $D=1$:

$$\tau = \gamma\tau' - \beta\vec{i}', \quad \vec{i} = -\beta\tau + \gamma\vec{i}', \quad \vec{j} = \vec{j}', \quad \vec{k} = \vec{k}'$$

Tout revient à transposer $(\tau, \vec{i})$ et $(\tau', \vec{i}')$ et à changer β en $-\beta$. On en déduit immédiatement le mouvement de O par rapport à O' : pour tout instant t' du temps propre de O' et pour t'' convenable

$\overrightarrow{O'_t O'_{t''}} = t''(\gamma\tau' - \beta\vec{i}') - t'\tau'$ appartient à $E_{\tau'}$ si et seulement si $t'' = t'/\gamma$ alors $\overrightarrow{O'_t O'_{t''}} = -t'(\beta/\gamma)\vec{i}'$ soit $\vec{v}' t'$ avec $\vec{v}' = -v\vec{i}'$, et le mouvement apparent de O pour O' est, à tout instant t' du temps propre de O' sur la droite $\Delta'_{t'}$ issue de $O'_{t'}$ dirigée par $\vec{i}'$ dans l'espace $O'_{t'} + E_{\tau'}$ de $O'_{t'}$.

Les origines des temps propres sont en O_0 et O'_0 coïncidant dans l'espace-temps : on dit que *les horloges des observateurs O et O' sont synchronisées en ce point de l'espace-temps*.

Ces espaces interviennent lorsque l'on considère le champ électromagnétique en O : pour l'observateur O_0 il se manifeste par les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ situés dans E_τ et pour O'_0 par $\vec{E}'$ et $\vec{B}'$ dans $E_{\tau'}$. Et selon (1.10) pour $\varepsilon = 1$

et $\vec{\beta} = \gamma \vec{v}$ on obtient les expressions de $\vec{E}'$ et $\vec{B}'$ dans $\mathcal{B}$

$$\vec{E}' = \gamma(\vec{v} \cdot \vec{E})\tau + \gamma \vec{E} + \gamma \vec{v} \wedge \vec{B}, \quad \vec{B}' = \gamma(\vec{v} \cdot \vec{B})\tau + \gamma \vec{B} - \gamma \vec{v} \wedge \vec{E}.$$

Illustrons par un dessin dans le plan des droites d'univers $\mathcal{D}(O)$ et $\mathcal{D}(O')$ de O et O' , où figurent les traces des espaces $\mathcal{E}$ de O et O' , en prenant

$$v = \frac{3}{5} \quad \text{donc} \quad \gamma = \frac{5}{4} \quad \text{et} \quad \tau' = \frac{5}{4}\tau + \frac{3}{4}\vec{i}, \quad \vec{i}' = \frac{5}{4}\vec{i} + \frac{3}{4}\tau$$

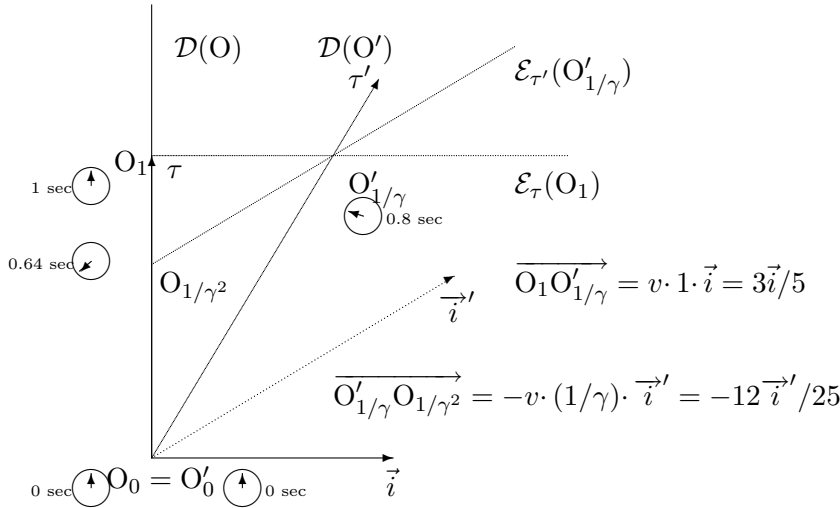


Figure 1.1

Les conditions (1.9) s'écrivent en faisant intervenir v :

$$\alpha = \gamma v, \quad \beta = \gamma v, \quad \delta = \gamma \quad \text{et} \quad \gamma^2(1 - v^2) = 1$$

Comme l'orientation temporelle est conservée $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$ et les relations

(1.8) prennent la forme de la *transformation de Lorentz réduite*

$$\begin{cases} t = \frac{t' + vx}{\sqrt{1 - v^2}}, & y = y' \\ x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2}}, & z = z' \end{cases} \quad (1.11)$$

En conclusion l'interprétation précédente d'un changement de base conservant les équations de Maxwell conduit à la Relativité : la cinématique relativiste a pour cadre l'espace temps $\mathcal{E}$ d'espace directeur E_4 muni de la forme de Minkowski $\mathcal{Q}$ de forme bilinéaire associée Φ . Pour un observateur, de trajectoire dans l'espace temps une droite $\mathcal{D}$, son abscisse sur $\mathcal{D}$ (pour la forme $\mathcal{Q}$) est son temps propre et à chaque instant de ce dernier l'hyperplan Φ -orthogonal à $\mathcal{D}$ issu de l'observateur est son espace : *temps et espace sont relatifs à l'observateur*. C'est dans son espace que se trouvent champs électrique et magnétique lui indiquant la présence du champ électromagnétique.

Par contre la cinématique galiléenne a pour cadre l'espace temps d'espace directeur $\mathbb{R} \times E_3$, le temps ayant alors un caractère universel et l'espace étant le même pour deux observateurs qui se croisent dans cet espace temps : à l'instant t la section de direction $\{t\} \times E_3$. La cinématique galiléenne est

la cinématique relativiste pour les petites vitesses : si v est très petit, pour $t \lll 1$ les relations (1.11) s'écrivent $t = t'$ (le temps est universel) et $x = x' + vt$, $y = y'$, $z = z'$.

1.3.3 Remarque

Souvent *la vitesse de la lumière est notée c* (différente de un). Transcrivons les relations précédentes dans ce cas : sans changer l'unité de longueur, changeons celle de temps en remplaçant t par ct , τ par τ/c car $t\tau$ est invariant, et alors v devient v/c . Les relations (dont (1.7)) deviennent

$$\tau' = \gamma(\tau + v\vec{i}), \quad \vec{i}' = \gamma(\vec{i} + \frac{v}{c^2}\tau), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

et la transformation de Lorentz réduite s'écrit

$$\begin{cases} t = \frac{t + vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} & , \quad y = y' \\ x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} & , \quad z = z' \end{cases} \quad (1.12)$$

Les champs $\vec{E}'$ et $\vec{B}'$ – pour O'_0 exprimés dans $\mathcal{B}'$ – se déduisent des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ – pour O_0 exprimés dans $\mathcal{B}$ – selon

$$\begin{cases} b'_1 = b_1 \\ b'_2 = \gamma b_2 + \gamma \frac{v}{c} e_3 \\ b'_3 = \gamma b_3 - \gamma \frac{v}{c} e_2 \end{cases} \quad \begin{cases} e'_1 = e_1 \\ e'_2 = \gamma e_2 - \gamma \frac{v}{c} b_3 \\ e'_3 = \gamma e_3 + \gamma \frac{v}{c} b_2 \end{cases}$$

$\vec{B}'$ s'écrit dans $\mathcal{B}'$:

$$\vec{B}' = b'_1 \vec{i}' + b'_2 \vec{j}' + b'_3 \vec{k}' = b_1 \vec{i}' + (\gamma b_2 + \gamma \frac{v}{c} e_3) \vec{j}' + (\gamma b_3 - \gamma \frac{v}{c} e_2) \vec{k}'$$

ou encore en faisant intervenir $\vec{B}$ et $\vec{E}$ ainsi que $\mathcal{B}$, avec $\vec{v} = v\vec{i}$

$$\vec{B}' = \gamma b_1 (\vec{i} + \frac{v}{c^2} \tau) + \gamma (b_2 + \frac{v}{c} e_3) \vec{j} + \gamma (b_3 - \frac{v}{c} e_2) \vec{k}$$

soit puisque $b_1 v = \vec{v} \cdot \vec{B}$

$$\vec{B}' = \gamma \frac{\vec{v} \cdot \vec{B}}{c^2} \tau + \gamma \vec{B} - \gamma \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{E}$$

et en changeant $\vec{B}$ en $\vec{E}$, $\vec{E}$ en $-\vec{B}$

$$\vec{E}' = \gamma \frac{\vec{v} \cdot \vec{E}}{c^2} \tau + \gamma \vec{E} + \gamma \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{B}$$

Ces couples de vecteurs $(\vec{E}, \vec{B})$ et $(\vec{E}', \vec{B}')$ relatifs respectivement à O_0 et O'_0 sont différents, sauf si $v = 0$ donc $\gamma = 1$, c'est à dire si les observateurs sont en repos relatif. Dans le cas contraire, chacun des couples appartient à l'espace Φ -orthogonal à la quadrivitesse de l'observateur, c'est-à-dire à son espace.

On vérifie immédiatement

$$(\vec{\mathbf{E}}')^2 - (\vec{\mathbf{B}}')^2 = (\vec{\mathbf{E}})^2 - (\vec{\mathbf{B}})^2, \quad \vec{\mathbf{E}}' \cdot \vec{\mathbf{B}}' = \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$$

invariants du champ électromagnétique.

Quel est l'effet d'une transformation de Galilée ? En considérant

$$\psi : (x = x' + vt, y = y', z = z')$$

il vient

$$\begin{aligned} \psi^* \Sigma &= b_1 dy \wedge dz + b_2 dz \wedge (dx' + vdt) + b_3 (dx' + vdt) \wedge dy \\ &\quad - cdt \wedge (e_1 dx' + e_2 dy + e_3 dz) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{cases} b'_1 &= b_1 \\ b'_2 &= b_2 \\ b'_3 &= b_3 \end{cases} \quad \begin{cases} e'_1 &= e_1 \\ e'_2 &= e_2 - vb_3 \\ e'_3 &= e_3 + vb_2 \end{cases}$$

soit

$$\vec{\mathbf{B}}' = \vec{\mathbf{B}}, \quad \vec{\mathbf{E}}' = \vec{\mathbf{E}} + \vec{v} \wedge \vec{\mathbf{B}}$$

appelées souvent formules "classiques" de transformation des champs, et l'on peut considérer $\vec{\mathbf{E}}'$ comme limite de la précédente lorsque $v \ll 1$ donc $\gamma \simeq 1$.